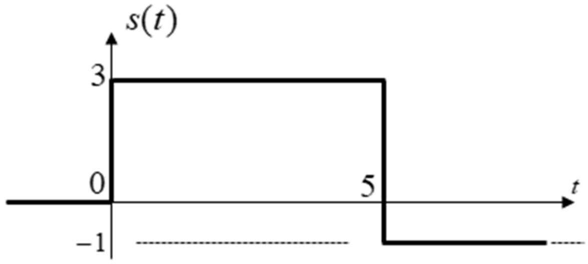
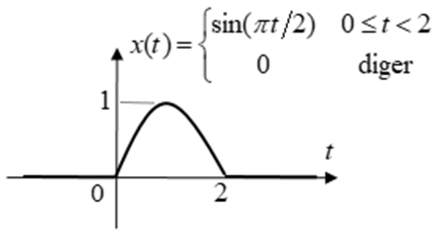
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

03.01.2020 Süre: 75 dakika

1. ve 2. sorular zorunlu, diğerleri seçmelidir. Üçten fazla seçmeli cevaplarsanız en iyi üçü dikkate alınır.

1)

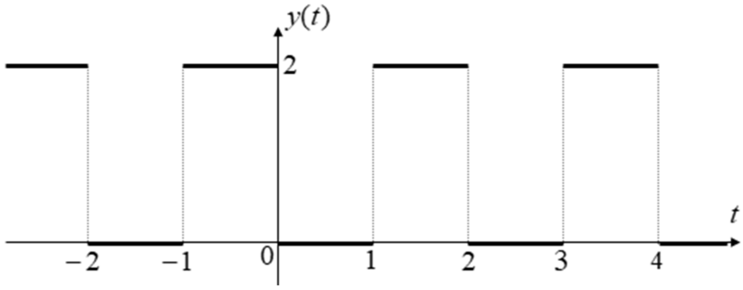




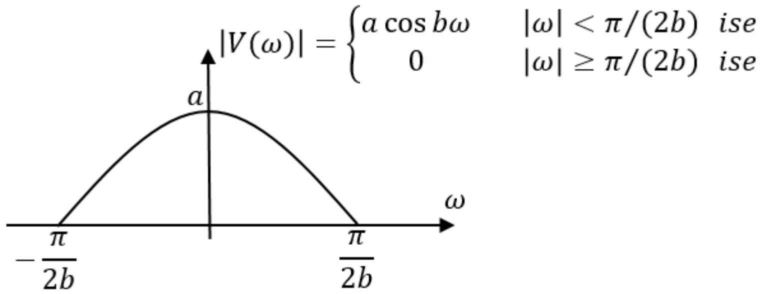
DZD bir sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$ ve girişi $x(t)$ yukarıda verilmiştir. Sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz **(10 puan).** Bu sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$'yi çiziniz **(6 puan)**. Bu sistem nedensel midir, kararlı mıdır, bellekli midir? DZD sistemlere özel ifadelerle gerekçesini ortaya koyarak cevaplayınız **(9 puan)**.

2) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\dot{y}(t)+2y(t)=x(t-3)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ve birim darbe tepkisini bulunuz. **(7+8 puan)**

3) Sağdaki şekildeki $T_0=2$ ile periyodik $y(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız (sıfırdan farklı en az 4 terimi ile seriyi yazınız). **(20 puan)**



4) $R=5\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $v(t)$ gerilim sinyalinin genlik spektrumu sağda verilmiştir. $a=20Vs$ ve $b=0{,}004s$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty<t<+\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**



5) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıda verilmiştir.

$$h[0]=5,\quad h[1]=-3,\quad h[2]=-7,\quad h[3]=4; \qquad \forall n<0 \text{ ve } \forall n>3 \text{ için } h[n]=0$$
$$x[-1]=6,\quad x[0]=2,\quad x[1]=0,\quad x[2]=-1; \qquad \forall n<-1 \text{ ve } \forall n>2 \text{ için } x[n]=0$$

$h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**

6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2]-y[n+1]-6y[n]=5x[n+2]+4x[n+1]$$

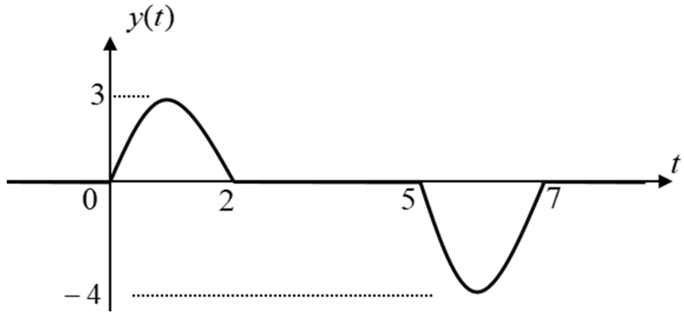
ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini **(15 puan)** bulunuz.

7) $x[0]=0$, $x[1]=12$, $x[2]=0$, $x[3]=-8$ ve $N=4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

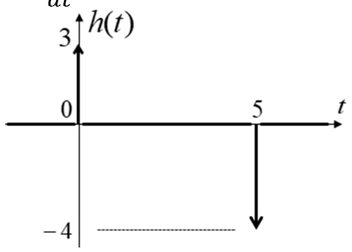
BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
03.01.2020

1) $s(t) = 3u(t) - 4u(t-5)$ diye yazılabilir. Bu yüzden $y(t) = 3x(t) - 4x(t-5)$ olur.



Ayrıca $h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 3\delta(t) - 4\delta(t-5)$



$\forall t < 0$ için $h(t) = 0$ olduğundan nedenseldir. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 3 + 4 = 7 < \infty$ yani sonlu olduğundan kararlıdır.

Bazı $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$, bu yüzden belleklidir.

2) $j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = e^{-j3\omega}X(\omega)$ (zamanda ötelenme özelliği) $\rightarrow$ $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}e^{-j3\omega}$ transfer fonksiyondur. $F(\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$ dersek $H(\omega) = e^{-j3\omega}F(\omega)$ $\rightarrow$ $h(t) = f(t-3)$ olur.

$f(t) = e^{-2t}u(t)$ olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla birim darbe tepkisi $h(t) = e^{-2(t-3)}u(t-3)$

3) $y(t)$ tek de değildir çift de değildir; fakat $y(t) - 1 = x(t)$ sinyali tektir. Bu yüzden $x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$
Ayrıca $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$.

$$b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^1 x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{2}\int_0^1 (0-1)\sin(k\pi t)\,dt = \frac{2}{k\pi}[\cos(k\pi t)]_0^1 = \frac{2}{k\pi}[\cos k\pi - 1]$$

$b_k = \frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -4/(k\pi) & k \text{ tekse} \\ 0 & k \text{ çiftse} \end{cases}$ (zaten $x(t)$ kısmı aynı zamanda tek harmonik simetrilidir.)

$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$ yani $a_0 = 2$ ve $a_k = 0\ \forall k > 0$. Sonuç:

$$y(t) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \cdots\right)$$

4) $$E = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{+\infty} |V(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)} a^2\cos^2 b\omega\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)} \frac{a^2}{2}[1 + \cos(2b\omega)]d\omega = \frac{a^2}{4\pi R}\left[\omega + \frac{\sin(2b\omega)}{2b}\right]_{-\pi/(2b)}^{\pi/(2b)}$$

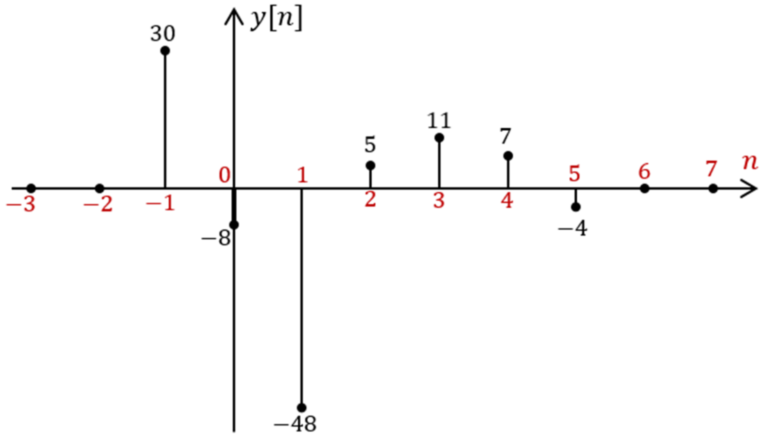
$$= \frac{a^2}{4\pi R}\left(\frac{\pi}{2b} + \frac{\sin\pi}{2b} - \frac{-\pi}{2b} - \frac{\sin(-\pi)}{2b}\right) = \frac{a^2}{4\pi R}\frac{\pi}{b} = E = \frac{a^2}{4bR} = \frac{20^2}{4 \times 0{,}004 \times 5}\ \mathrm{J} = 5\ \mathrm{kJ} = E$$

5) $\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = 5 - 3z^{-1} - 7z^{-2} + 4z^{-3}$ $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = 6z + 2 + 0z^{-1} - 1z^{-2}$

$Y(z) = H(z)X(z) = 30z - 8 - 48z^{-1} + 5z^{-2} + 11z^{-3} + 7z^{-4} - 4z^{-5}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, z^{-n}$$

(Burada doğrudan sonuç yazıldı ama öğrenciden bunun çıkartılışı da isteniyordu (önceki cevap anahtarlarındaki gibi).



6) Transfer fonksiyon $H(z) = \frac{5z^2+4z}{z^2-z-6}$; $|z| > 3$

$\frac{H(z)}{z} = \frac{5z+4}{(z+2)(z-3)} = \frac{A}{z-(-2)} + \frac{B}{z-3}$

$A = \frac{5(-2)+4}{-2-3} = \frac{6}{5}$ $B = \frac{5\times3+4}{3-(-2)} = \frac{19}{5}$

$H(z) = \frac{6}{5}\cdot\frac{z}{z-(-2)} + \frac{19}{5}\cdot\frac{z}{z-3}$; $|z| > 3$ $\rightarrow$ $h[n] = \left(\frac{6}{5}(-2)^n + \frac{19}{5}3^n\right)u[n]$

7) $\omega_o = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0 = \frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4} = \frac{0+12+0-8}{4} = 1 = c_0$

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j1\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot1/2}}^{-j} + x[2]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot2/2}}^{-1} + x[3]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1 = \frac{0 - j12 - 0 + j(-8)}{4} = -j5 = c_1 \quad\rightarrow\quad c_1^* = c_3 = j5$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j2\pi n/2} = \frac{x[0]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot0/2}}^{1} + x[1]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot1/2}}^{-1} + x[2]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot2/2}}^{1} + x[3]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2 = \frac{0-12+0-(-8)}{4} = -1 = c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2} = c_0 e^{j0\pi n/2} + c_1 e^{j1\pi n/2} + c_2 e^{j2\pi n/2} + c_3 e^{\overbrace{j3\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n] = 1 - j5e^{j\pi n/2} - e^{j\pi n} + j5e^{-j\pi n/2}}$$