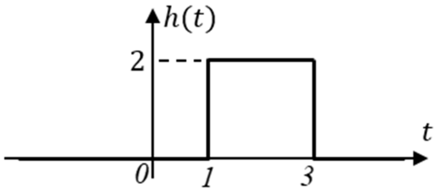
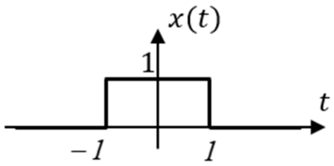
SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI SORULARI

11.01.2022 Süre: 80 dakika

Aşağıdaki sorulardan istediğiniz 5'ini çözmeniz beklenmektedir.
Fazla çözerseniz sadece en iyi beşi dikkate alınır.

1)





Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ yukarıda solda verilmiştir. Sistemin birim basamak tepkisini ($s(t)$) çiziniz **(10 puan)**. Sistemin girişi $x(t)$ yukarıda sağdaki gibi ise sistem çıkışı $y(t)$ ne olur? Çiziniz **(10 puan)**.

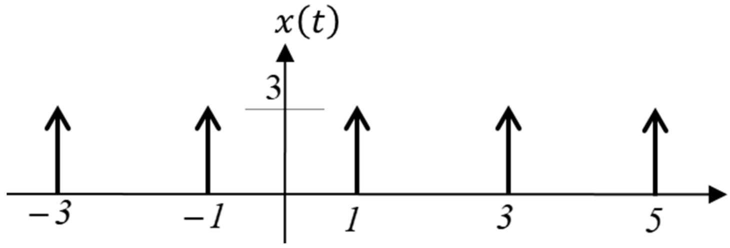
2) Doğrusal ve zamanla değişmez (DZD) bir sistemin birim darbe tepkisi $h[n]$ ve girişi $x[n]$ aşağıda verilmiştir.

$$h[0] = 4\,,\quad h[1] = 6\,,\quad h[2] = -2\,,\quad h[3] = -7\,; \qquad \forall n < 0 \text{ ve } \forall n > 3 \text{ için } h[n] = 0$$
$$x[-1] = 2\,,\quad x[0] = 0\,,\quad x[1] = -5,\quad x[2] = 3\,; \qquad \forall n < -1 \text{ ve } \forall n > 2 \text{ için } x[n] = 0$$

$h[n]$, $x[n]$ ve sistem çıkışı $y[n]$ 'in her birinin Z-dönüşümlerini bulunuz ve $y[n]$'i <u>çiziniz</u>. **(20 puan)**

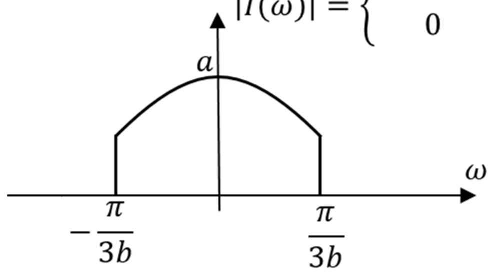
3) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 4\dot{x}(t) - 8x(t)$ ile verilen nedensel sistemin transfer fonksiyonunu ($H(\omega)$) **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini ($h(t)$) **(10 puan)** bulunuz. $x(t) = -2e^{-t}u(t)$ girişi için sistem çıkışının Fourier dönüşümünü ($Y(\omega)$) yazınız. **(5 puan)**
(*Dikkat:* $y(t)$ sorulmuyor. Fonksiyon harflerini doğru kullanınız.)

4) Sağdaki şekildeki $T_0 = 2$ ile periyodik $x(t)$ sinyalini Fourier serisine açınız (sıfırdan farklı en az 4 terimini açıkça göstererek seriyi yazınız). **(20 puan)**



5) $R = 5\Omega$ 'luk bir direnç üzerindeki $i(t)$ <u>**akım**</u> sinyalinin genlik spektrumu sağda verilmiştir. $a = 6As$ ve $b = 0{,}004s$ 'dir. Bu direnç üzerinde $-\infty < t < +\infty$ zaman aralığında harcanan toplam enerjiyi bulunuz. **(20 puan)**

$$|I(\omega)| = \begin{cases} a\cos b\omega & |\omega| < \pi/(3b) \text{ ise} \\ 0 & |\omega| \geq \pi/(3b) \text{ ise} \end{cases}$$



6) Giriş(x)-çıkış(y) ilişkisi

$$y[n+2] - y[n] = 3x[n+2] - x[n+1]$$

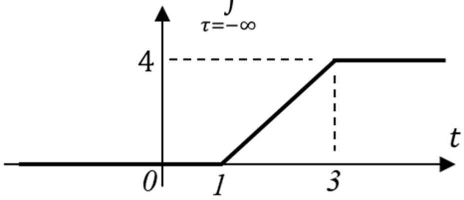
ile verilen nedensel sistemin ($H(z)$) **(5 puan)** ve birim darbe tepkisini ($h[n]$) **(10 puan)** bulunuz. $x[n] = \delta[n-2]$ girişi için sistem çıkışını ($y[n]$) bulunuz. **(5 puan)**

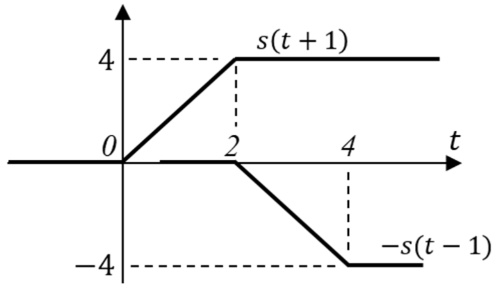
7) $x[0] = 2$, $x[1] = 10$, $x[2] = -6$, $x[3] = 14$ ve $N = 4$ ile periyodik olan $x[n]$ sinyalinin Fourier serisini, katsayılarını bulup yerine koyarak yazınız. **(20 puan)**

BAŞARILAR …

SİNYALLER VE SİSTEMLER FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
11.01.2022

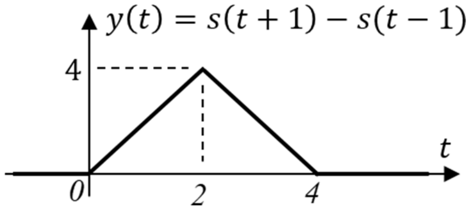
1) $s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$





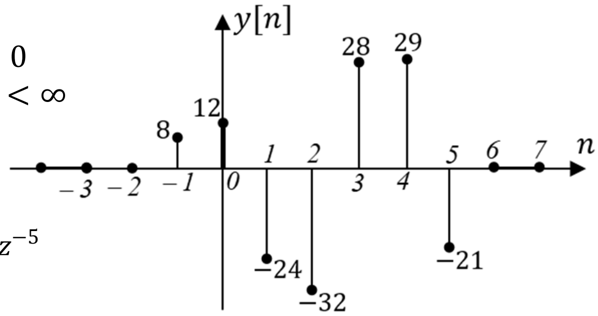
$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$

$y(t) = s(t+1) - s(t-1)$



2) $\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = 4 + 6z^{-1} - 2z^{-2} - 7z^{-3}$; $|z| > 0$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = 2z + 0 - 5z^{-1} + 3z^{-2}$; $0 < |z| < \infty$



$Y(z) = H(z)X(z)$

$Y(z) = 8z + 12 - 24z^{-1} - 32z^{-2} + 28z^{-3} + 29z^{-4} - 21z^{-5}$

$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n}$; $0 < |z| < \infty$

3) $H(\omega) = \frac{4(j\omega)-8}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6} = \frac{4(j\omega)-8}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+3}$

$A = \frac{4\cdot(-2)-8}{-2+3} = -16 \qquad B = \frac{4\cdot(-3)-8}{-3+2} = 20 \qquad h(t) = \{-16e^{-2t} + 20e^{-3t}\}u(t)$

$X(\omega) = \frac{-2}{j\omega+1} \qquad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{-8(j\omega)+16}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$

4) $x(t)$ çifttir. $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. Bu yüzden $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\pi t)$

Ancak belirsizliğe girmemek için katsayı integralini tam periyot üzerinden hesaplayalım:

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^2 x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^2 \underbrace{3\delta(t-1)\cos(k\pi t)}_{3\delta(t-1)\underbrace{\cos(k\pi 1)}_{(-1)^k}}\,dt = 3(-1)^k \underbrace{\int_0^2 \delta(t-1)dt}_{1}$$

$$a_k = 3(-1)^k = \begin{cases} -3 & k \text{ tekse} \\ 3 & k \text{ çiftse} \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad c_k = (-1)^k \frac{3}{2}$$

$$x(t) = \frac{3}{2} - 3\cos\pi t + 3\cos 2\pi t - 3\cos 3\pi t + - \cdots$$

veya

$$x(t) = \frac{3}{2}\left\{\ldots - e^{-j3\pi t} + e^{-j2\pi t} - e^{-j\pi t} + 1 - e^{j\pi t} + e^{j2\pi t} - e^{j3\pi t} + - \cdots\right\}$$

5) $E=\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} R\cdot|i(t)|^2dt=\frac{R}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty}|I(\omega)|^2d\omega=\frac{R}{2\pi}\int\limits_{\omega=-\frac{\pi}{3b}}^{\frac{\pi}{3b}} a^2\underbrace{\cos^2 b\omega}_{\frac{1+\cos(2b\omega)}{2}}d\omega=\frac{a^2R}{4\pi}\left[\omega+\frac{\sin(2b\omega)}{2b}\right]_{-\pi/(3b)}^{\pi/(3b)}$

$$=\frac{a^2R}{4\pi}\left(\frac{\pi}{3b}+\frac{\sin(2\pi/3)}{2b}-\frac{-\pi}{3b}-\frac{\sin(-2\pi/3)}{2b}\right)=\frac{a^2R}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{3b}+\frac{\sqrt{3}}{2b}\right)=\frac{6^2\times 5}{4\pi\times 0{,}004}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=E\approx 10{,}6\text{ kJ}$$

6) $H(z)=\frac{3z^2-z}{z^2-1}\quad\rightarrow\quad\frac{H(z)}{z}=\frac{3z-1}{(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}\quad;\ |z|>1$

$A=\frac{3\times1-1}{1+1}=1\qquad B=\frac{3\times(-1)-1}{-1-1}=2\quad\rightarrow\quad H(z)=\frac{z}{z-1}+2\frac{z}{z-(-1)}\quad;\ |z|>1$

$$h[n]=(1^n+2(-1)^n)u[n]=(1+2(-1)^n)u[n]$$

Bu birim darbe ($\delta[n]$) girişi için çıkış ve sistem zamanla değişmez olduğundan, $x[n]=\delta[n-2]$ girişi için sistem çıkışı

$$y[n]=h[n-2]=(1+2(-1)^n)u[n-2]$$

olur. $(-1)^{n-2}=(-1)^n$ olduğuna dikkat ediniz.

7) $\omega_o=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x[n]=\sum\limits_{k=0}^{3}c_ke^{jk\pi n/2}$ Fourier serisidir. Katsayılar şöyle bulunur:

$$c_k=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk\pi n/2}$$

Ortalama değer: $c_0=\frac{x[0]+x[1]+x[2]+x[3]}{4}=\frac{2+10-6+14}{4}=5=c_0$

$$c_1=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j1\pi n/2}=\frac{x[0]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 0/2}}^{1}+x[1]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 1/2}}^{-j}+x[2]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 2/2}}^{-1}+x[3]\overbrace{e^{-j1\pi\cdot 3/2}}^{j}}{4}$$

$$c_1=\frac{2-j10-6\cdot(-1)+j14}{4}=2+j=c_1\quad\rightarrow\quad c_1^*=c_3=2-j$$

$$c_2=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j2\pi n/2}=\frac{x[0]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 0/2}}^{1}+x[1]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 1/2}}^{-1}+x[2]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 2/2}}^{1}+x[3]\overbrace{e^{-j2\pi\cdot 3/2}}^{-1}}{4}$$

$$c_2=\frac{2-10+(-6)-14}{4}=-7=c_2$$

Tüm katsayıları Fourier serisinde yerine yazalım:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{3}c_ke^{jk\pi n/2}=c_0e^{j0\pi n/2}+c_1e^{j1\pi n/2}+c_2e^{j2\pi n/2}+c_3e^{\overbrace{j3\pi n/2}^{\equiv -j\pi n/2}}$$

$$\boxed{x[n]=5+(2+j)e^{j\pi n/2}-7e^{j\pi n}+(2-j)e^{j3\pi n/2}}$$