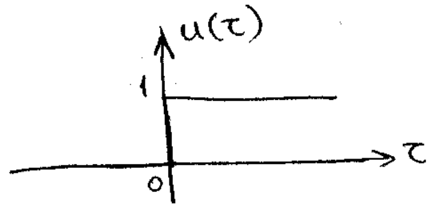
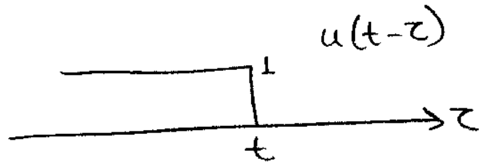
SORU: $u(t) * u(t) = z(t) = ?$

ÇÖZÜM:

$$z(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$



$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise her } \tau \text{ için} \\ 0 & t \geqslant 0 \text{ ise } \tau > t \text{ için} \\ 0 & t \geqslant 0 \text{ ise } \tau < 0 \text{ için} \\ 1 & t \geqslant 0 \text{ ve } 0 \leq \tau \leq t \text{ ise} \end{cases}$$

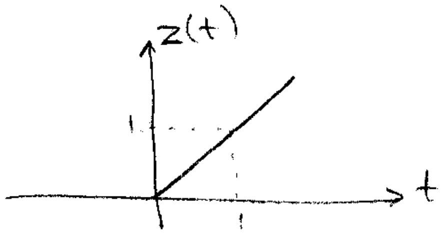


$t<0$ ise $\quad z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$t \geqslant 0$ ise $\quad z(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{t} 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_0^t = t$

Sonuç: $\quad z(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ise} \\ t & t \geqslant 0 \text{ ise} \end{cases}$

yani $\quad z(t) = t \cdot u(t)$



SORU: $u(t-1) * u(t) = y(t) = ?$

ÇÖZÜM:

$u(t) = h(t)$

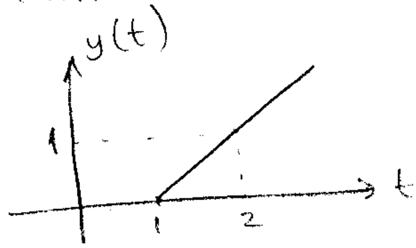
$u(t-1) = x(t-1)$ diyelim.

Yani DZD bir sistemin birim darbe tepkisi $h(t)$ olsun ve bu sisteme $x(t-1)$ girişi uygularsak çıkış $y(t)$ oluyor.

Giriş $x(t)$ olsaydı (yani $x(t) = u(t)$) çıkışımız bir önceki örnekte bulunan $z(t) = u(t) * u(t) = t\,u(t)$ olacaktı.

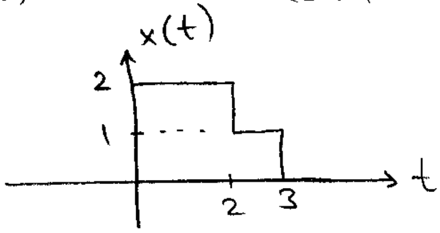
Zamanla değişmezlikden $x(t-1)$ girişi için çıkış $z(t-1) = y(t)$ olur. Yani

$$y(t) = (t-1)\,u(t-1)$$



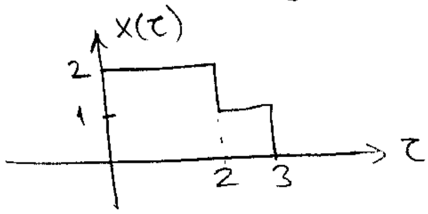
Dikkat: Sınavda olsa $u(t) * u(t) = t\,u(t)$ işlemi ezberden yazılmaz. Diğer yoldan çözmek daha kolay olabilirdi. Ama bu da bir çözüm yolu.

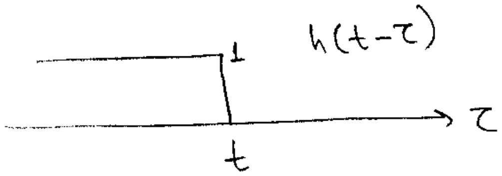
SORU: Birim darbe tepkisi $h(t) = u(t)$ olan DZD bir sistemin girişine şekildeki $x(t)$ sinyali uygulanıyor. Çıkış $y(t)$ ne olur?



ÇÖZÜM: 1. yol:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$





$t<0$ ise $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ (her τ için)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$$

$0 \le t < 2$ ise

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \text{ ise} \\ 1 \cdot 2 = 2 & 0 \le \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \tau > t \text{ ise} \end{cases}$$

$$0 \le t < 2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t 2 \cdot d\tau = 2\tau \Big|_0^t = 2t$$

$2 \le t < 3$ ise

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \text{ ise} \\ 1 \cdot 2 = 2 & 0 \le \tau \le 2 \text{ ise} \\ 1 \cdot 1 = 1 & 2 < \tau \le t \text{ ise} \\ 0 & \tau > t \text{ ise} \end{cases}$$

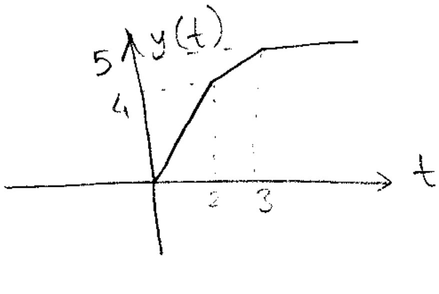
$$y(t) = \int_0^2 2\, d\tau + \int_2^t 1 \cdot d\tau = 2\tau \Big|_0^2 + \tau \Big|_2^t = 4 + (t-2)$$

$$y(t) = t + 2$$

$t \geq 3$ ise:

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \text{ ise} \\ 2 & 0 \le \tau \le 2 \text{ ise} \\ 1 & 2 < \tau \le 3 \text{ ise} \\ 0 & \tau > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^2 2\, d\tau + \int_2^3 1 \cdot d\tau = 2\tau \Big|_0^2 + \tau \Big|_2^3 = 4 + 1 = 5$$



2. yol :

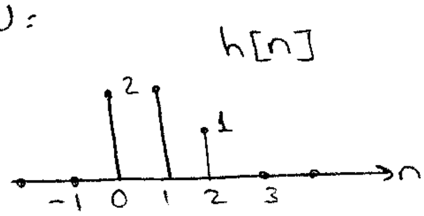
$$\underset{\substack{\downarrow \\ \delta(t)\text{ girişi için çıkış}}}{h(t)} = u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

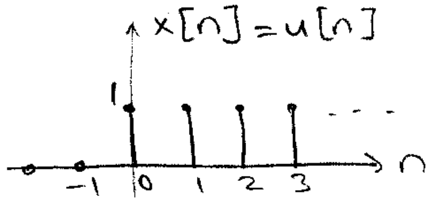
} olduğunu görebilirseniz δ ile h arasındaki ilişkinin aynısını x ile y arasında yazabilirsiniz.

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Benzer işlemlerle bölge bölge aynı sonuçlar bulunur.

SORU:





$$y[n] = x[n] * h[n] = ?$$

ÇÖZÜM: **1. yol:**

$h[n]$, DZD bir sistemin birim darbe tepkisi varsayalım. $x[n]$ de giriş olsun.

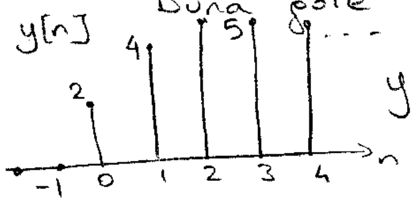
O zaman çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$ olur.

$x[n] = u[n]$ olduğundan $y[n]$ birim basamak tepkisidir.

Birim darbe tepkisi $h[n]$ ile birim basamak tepkisi arasında (DZD sistemler için)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad \text{ilişkisi vardır.}$$

Buna göre



$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ ise} \\ 2 & n = 0 \text{ ise} \\ 2+2=4 & n = 1 \text{ ise} \\ 2+2+1=5 & n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

2. yol: $h[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$ (olduğu gösterilmeli)

$y[n] = x[n] * h[n] = 2x[n] * \delta[n] + 2x[n] * \delta[n-1] + x[n] * \delta[n-2]$

$y[n] = 2x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] = 2u[n] + 2u[n-1] + u[n-2]$

olur.

SORU: $x(t) = e^{t} u(t-1)$ ile $h(t) = e^{-t} u(t)$ sinyallerinin konvolüsyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: $y(t) = x(t) * h(t)$ olsun.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} u(\tau-1) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$\underbrace{u(\tau-1)}_{\tau<1 \text{ ise sıfır}} \underbrace{u(t-\tau)}_{\tau>t \text{ ise sıfır.}} = \begin{cases} 1 & \text{yalnızca } t \geq 1 \text{ ve } \tau \leq t \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Dolayısıyla $t < 1$ ise $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

$t \geq 1$ ise $y(t) = \int_{1}^{t} e^{\tau} \cdot e^{-t+\tau} \cdot 1 d\tau = e^{-t} \int_{1}^{t} e^{2\tau} d\tau$

$$y(t) = e^{-t} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2\tau} \right) \Big|_{1}^{t} = \frac{1}{2} e^{-t} \left(e^{2t} - e^{2} \right) = \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{2-t}$$

Sonuç: $y(t) = \frac{1}{2} \left(e^{t} - e^{-(t-2)} \right) u(t-1)$