(*SİNYALLER ünitesinin power point sunumundaki girişinden sonraki kısmıdır.*)

SİNYALLERDE BAZI ÖZELLİKLER

1) Periyodiklik

Sürekli zamanlı:

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $x(t+T_0) = x(t)$ şartını sağlayan bir $T_0 \neq 0$ gerçel sayısı mevcutsa, $x(t)$ sinyalinin T_0 periyoduyla periyodik olduğu söylenir. Mümkün olan en küçük $T_0 > 0$ periyoduna “ana periyot” denir.

Ayrık zamanlı:

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x[n+N_0] = x[n]$ şartını sağlayan bir $N_0 \neq 0$ tamsayısı mevcutsa, $x[n]$ sinyalinin N_0 periyoduyla periyodik olduğu söylenir. Mümkün olan en küçük $N_0 > 0$ periyoduna “ana periyot” denir.

Örnek:

$x(t) = \cos \omega t \quad$ ($\omega \neq 0$ gerçel)

$x(t+T_0) = x(t) \quad \rightarrow \cos\big(\omega(t+T_0)\big) = \cos \omega t = \cos(\omega t + \underbrace{\omega T_0}_{2k\pi})$ olmalı ($k \neq 0$ bir tamsayı).

Yani her $k \neq 0$ tamsayısı için sinyal $T_0 = \frac{2k\pi}{\omega}$ periyoduyla periyodik düşünülebilir. Bunlardan en küçük pozitif olan $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ ana periyottur ($k = 1$ alınarak bulundu).

Mesela $\cos(7t/3)$ ’ün ana periyodu $2\pi/(7/3) = 6\pi/7$.

$\sin \omega t$ için de periyot ve ana periyot aynıdır.

$\tan \omega t$ için ise 2π yerine π gelir: $T_0 = \frac{k\pi}{\omega}$

Örnek:

$y[n] = \cos[n/8]$

$y[n] = y[n+N_0] \quad \rightarrow \cos[(n+N_0)/8] = \cos[n/8] = \cos[(n/8) + \underbrace{(N_0/8)}_{2k\pi}]$ olmalı ($k \neq 0$ bir tamsayı).

Yani $N_0 = \frac{2k\pi}{1/8} = 16k\pi \neq 0$ tamsayısı mevcut olsa sinyal periyodik denilebilirdi. Ancak π irrasyonel bir sayı olduğu için, hiç bir $k \neq 0$ tamsayısı için $16k\pi$ tamsayı olamaz. Bu yüzden $y[n] = \cos[n/8]$ sinyali periyodik <u>değildir</u>. Ayrık zamanlı sinyallerdeki bu inceliğe dikkat edilmelidir.

Hatırlatma: Rasyonel sayılar iki tamsayının oranı olarak yazılabilen sayılardır. İrrasyonel sayılar da iki tamsayının oranı olarak yazılamayan gerçel sayılardır.

Örnek:

$x[n] = \sin[6\pi n/13] \qquad$ (yani $\omega = 6\pi/13$)

$N_0 = \frac{2k\pi}{\omega}$ tamsayısı bir $k \neq 0$ tamsayısı ile mümkün mü diye bakalım.

$N_0 = \frac{2k\pi}{6\pi/13} = \frac{13k}{3}$ Yani sinyal sıfır hariç 3’ün tam katı bir k için, yani sıfır hariç 13’ün tam katı bir periyotla periyodik düşünülebilir. Bunlardan en küçük pozitif olan $N_0 = 13$ ana periyottur ($k = 3$ alınarak bulundu).

Örnek:

$y[n] = \underbrace{\sin[\pi n/5]}_{N_1=10} + \underbrace{\cos[3\pi n/17]}_{N_2=34} + \underbrace{4 \cdot (-1)^n}_{N_3=2}$ Periyodik.

Ana periyot $N_0 = EKOK(N_1, N_2, N_3) = 170$.

Örnek:

$x(t) = \underbrace{\sin(t/7)}_{T_1=14\pi} + \underbrace{\cos(3t/4)}_{T_2=8\pi/3}$ Ortak bir tam kat varsa periyodiktir. Ancak sürekli zamanlıda ortak tam kat, tamsayı olmak zorunda değildir, gerçel bir tam kat olması yeterlidir.

Burada da $x(t)$ sinyali, T_1 ve T_2'nin en küçük ortak tam katı $T_0 = 56\pi$ ana periyodu ile periyodiktir.

Soru: Periyodik sinyallerin toplamı daima periyodik midir?

Cevap: Ayrık zamanlı bir sinyalin tüm bileşenleri periyodik ise kesinlikle bir tamsayı olan ortak kat vardır. Bu yüzden ayrık zamanlı için cevap evet, daima periyodiktir.

Sürekli zamanlıda ise bileşenlerin gerçel ana periyotlarının ortak bir tam katı olmayabilir. Bu yüzden tüm bileşenleri periyodik bir sinyalin daima periyodik olduğu söylenemez.

Örnek:

$y(t) = \underbrace{\sin t}_{T_1=2\pi} + \underbrace{\cos(\sqrt{3}\,t)}_{T_2=2\pi/\sqrt{3}}$

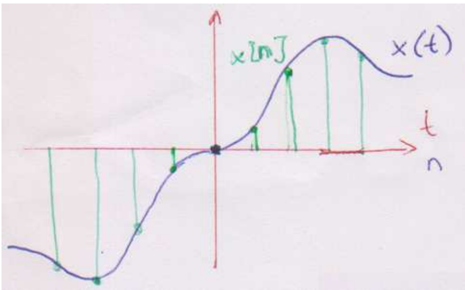
$T_1/T_2 = \sqrt{3}$ irrasyonel olduğundan, ortak bir tam kat yoktur (irrasyonel sayıyla bile yoktur). Bu yüzden, bileşenleri periyodik olmasına rağmen $y(t)$ sinyali periyodik <u>değildir</u>.

2) Teklik ve Çiftlik

a) Tek Sinyaller:

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $x(-t) = -x(t)$ ya da $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x[-n] = -x[n]$

şartını sağlayan sinyallerdir, şekildeki gibi:



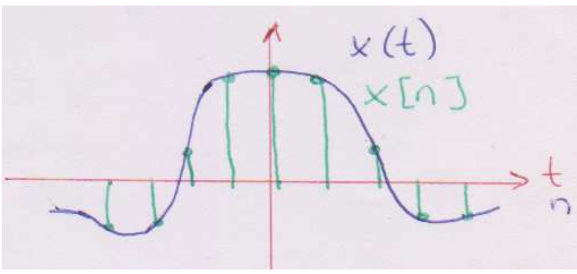
Tanım gereği $x(0) = 0$ ya da $x[0] = 0$ yani orijinden geçerler ve orijine göre simetriktirler.

$\sin \omega t,\ t, t^3, t^5, \ldots$; $\sin[\omega n],\ n, n^3, n^5, \ldots$ tek sinyallerdir.

b) Çift Sinyaller:

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $x(-t) = x(t)$ ya da $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x[-n] = x[n]$

şartını sağlayan sinyallerdir, şekildeki gibi:



Düşey eksene göre simetriktirler.

Sabitler (hem sürekli hem ayrık zamanlı), $\cos \omega t,\ t^2, t^4, \ldots$; $\cos[\omega n],\ n^2, n^4, \ldots$ çift sinyallerdir.

c) Bir Sinyalin Tek ve Çift Bileşenlerine Ayrıştırılması:

Her sinyal biri tek, biri çift, iki bileşenin (sırasıyla x_T ve $x_Ç$ ile gösterelim) toplamı halinde yazılabilir:

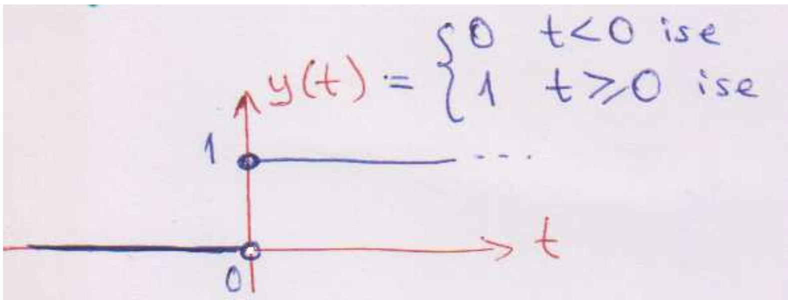
$$x(t) = x_T(t) + x_Ç(t)$$

$$x_T(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad , \qquad x_Ç(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

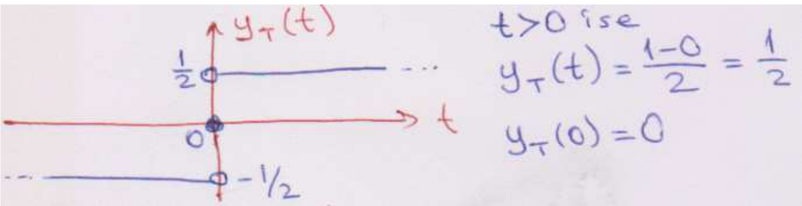
Bu ifadelerin ayrık zamanlı benzerleri de geçerlidir (t yerine n yazılarak).

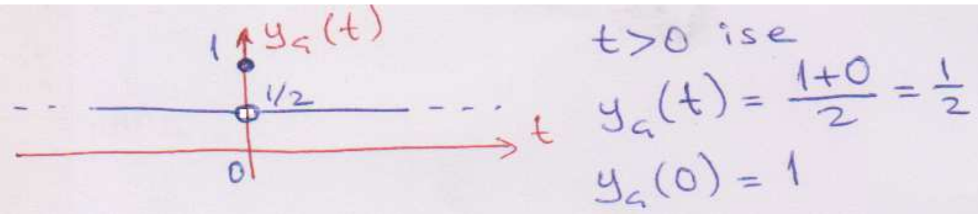
Dikkat: Daima $x_T(0) = 0$ ve $x_Ç(0) = x(0)$.

Örnek:



Önce sıfır ve sonraki anlar için çizilip sonra simetri alınması tavsiye edilir.





Sağlama için, tek ve çift bileşenlerin toplamının ilk sinyali verdiği, tüm zamanlarda doğrulanmalıdır.

Dikkat:

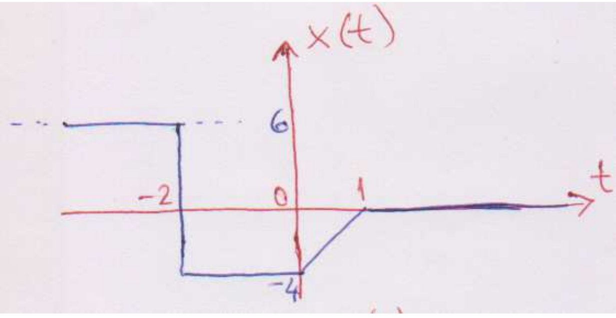
Sağ ve sol yarı bölgelerden birinde özel olan bir zamanın simetriği de özeldir. Mesela sağda 1 anı özel ise -1 anı da özeldir. Solda -2 anı özel ise 2 anı da özeldir.

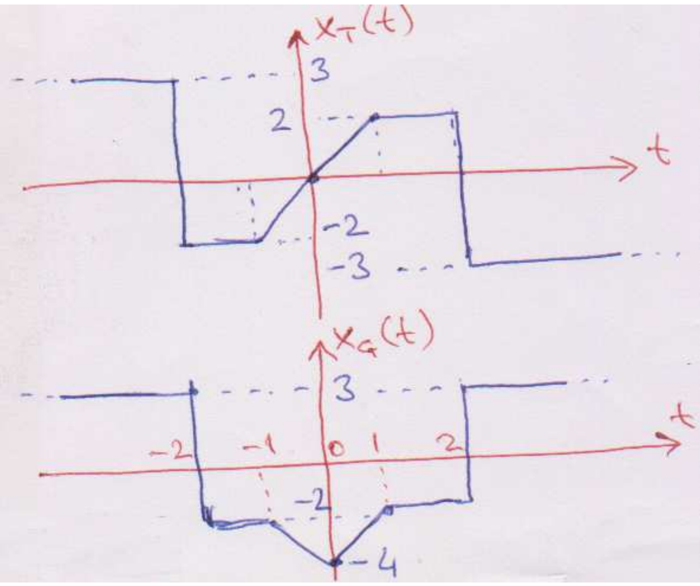
Ani sıçrama noktalarının hemen öncesi ve hemen sonrası da özeldir, bileşen değerleri ayrı ayrı bulunmalıdır. t_1^- anının simetriği $(-t_1)^+$ anı, t_1^+ anının simetriği $(-t_1)^-$ anıdır, yani orijine uzaklığı aynı olur.

Doğru parçalarından oluşan şeklin bileşenleri de doğru parçalarından oluşur. Özel noktalar (köşeler) bulunup arası doğru parçasıyla çizilebilir.

Herhangi bir anda bileşenlerin eğimlerinin toplamı da ilk sinyalin eğimine eşit olmalıdır.

Örnek:





$$x_T(0) = 0$$

$$x_T(1) = \frac{x(1) - x(-1)}{2} = \frac{0 - (-4)}{2} = 2$$

$$x_T(2^-) = \frac{x(2^-) - x(\overbrace{-(2^-)}^{(-2)^+})}{2} = \frac{0 - (-4)}{2} = 2$$

$$\forall t > 2 \ \text{için} \ \ x_T(t) = x_T(2^+) = \frac{x(2^+) - x(\overbrace{-(2^+)}^{(-2)^-})}{2}$$

$$= \frac{0 - 6}{2} = -3$$

$$x_Ç(0) = x(0) = -4$$

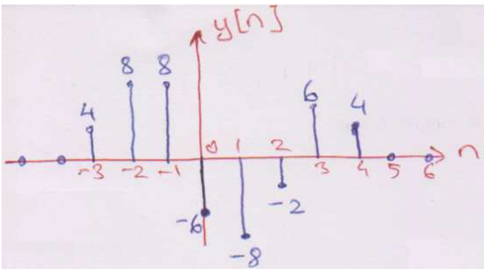
$$x_Ç(1) = \frac{x(1) + x(-1)}{2} = \frac{0 + (-4)}{2} = -2$$

$$x_Ç(2^-) = \frac{x(2^-) + x(\overbrace{-(2^-)}^{(-2)^+})}{2} = \frac{0 + (-4)}{2} = -2$$

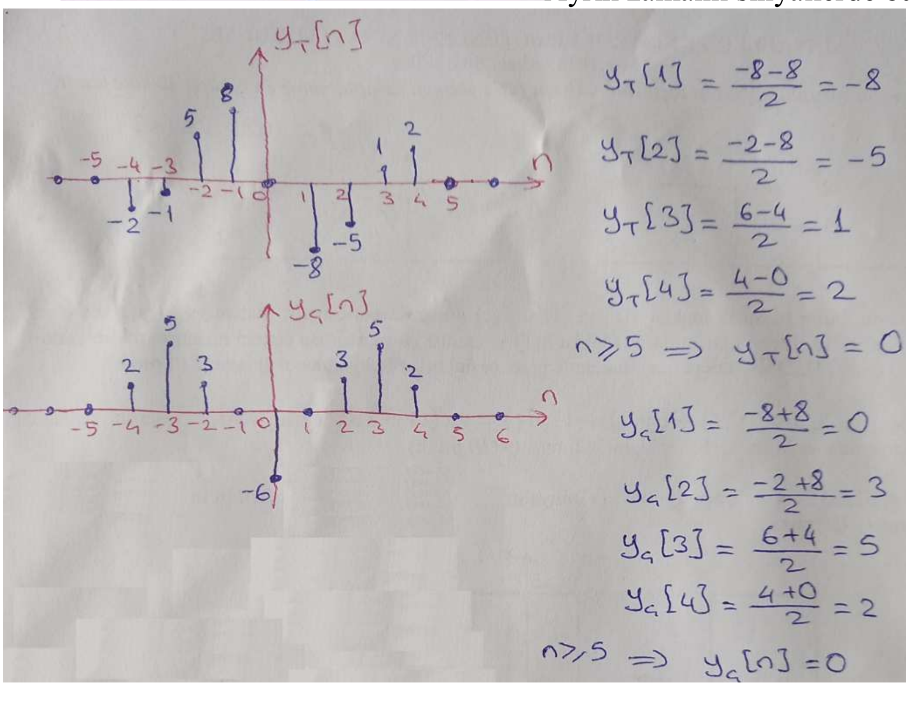
$$\forall t > 2 \ \text{için} \ \ x_Ç(t) = x_Ç(2^+) = \frac{x(2^+) + x(\overbrace{-(2^+)}^{(-2)^-})}{2}$$

$$= \frac{0 + 6}{2} = 3$$

Örnek:



Ayrık zamanlı sinyallerde bu işlem görüldüğü gibi daha kolaydır.



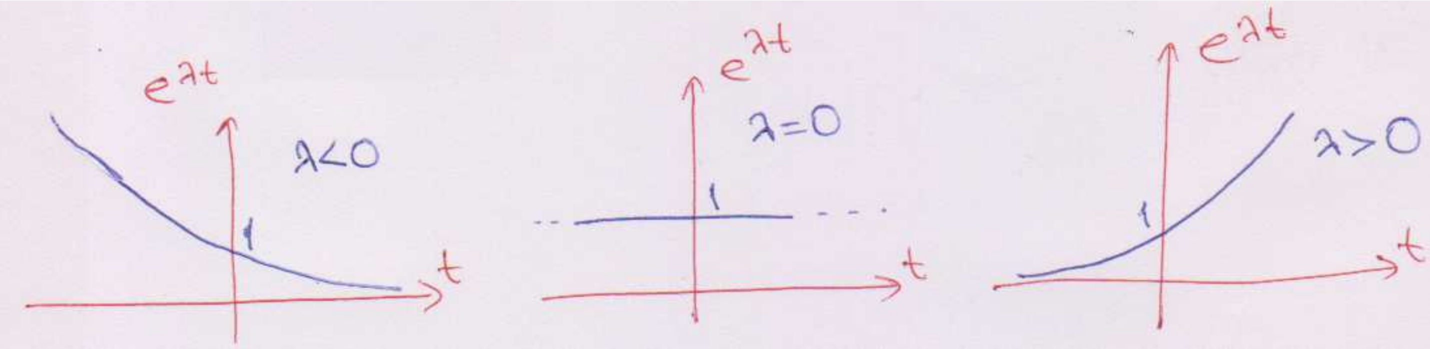
TEMEL SÜREKLİ ZAMAN SİNYALLERİ

1. Üstel Sinyaller

$e^{\lambda t}$ biçimindeki sinyallerdir.

a) λ gerçel ise:

λ değerine göre üç seçenek vardır.



Sabitleri $c = ce^{0t}$ diye üstel düşünmek bazen kolaylık sağlar.

b) λ karmaşık ise:

σ ve ω gerçel olmak üzere $\lambda = \sigma + j\omega$ diyelim.

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

olur. Ancak böyle karmaşık sinyallerle zaman uzayında tek başına pek karşılaşmayız. Genellikle eşlenik çift toplamı şeklinde karşılaşırız ve bu toplam gerçel olarak da ifade edilebilir. Buna $y(t)$ diyelim:

$$y(t) = ce^{\lambda t} + c^* e^{\lambda^* t} = ce^{\sigma t} e^{j\omega t} + c^* e^{\sigma t} e^{-j\omega t}$$

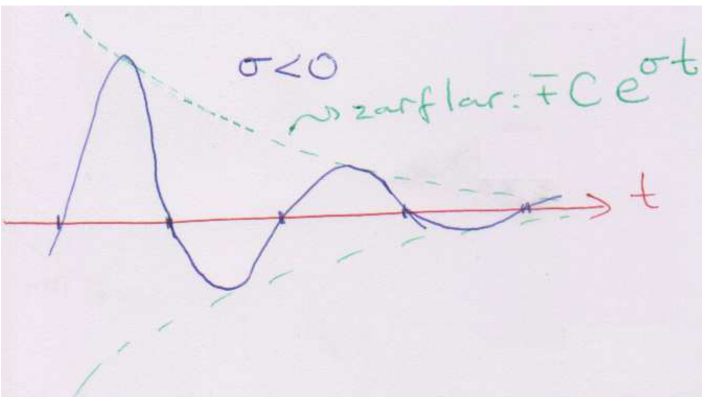
$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ ve $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$ yerine yazılırsa:

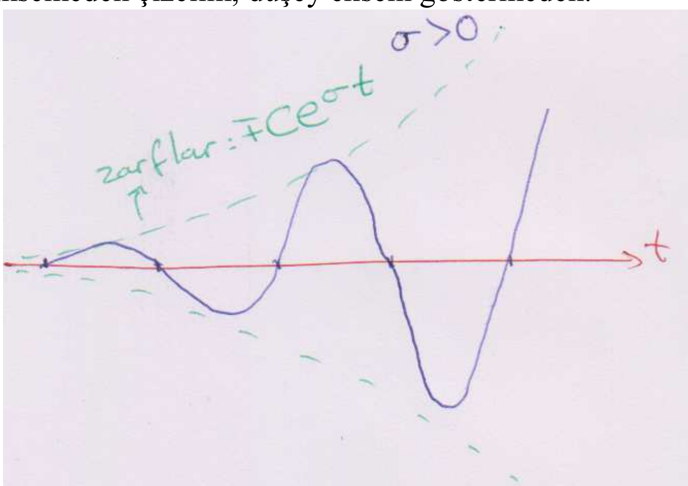
$$y(t) = \underbrace{(c + c^*)}_{A\text{ (gerçel)}} e^{\sigma t}\cos\omega t + \underbrace{j\underbrace{(c - c^*)}_{\text{sanal}}}_{B\text{ (gerçel)}} e^{\sigma t}\sin\omega t$$

$$y(t) = Ae^{\sigma t}\cos\omega t + Be^{\sigma t}\sin\omega t = Ce^{\sigma t}\cos(\omega t - \phi)$$

biçiminde de yazılabilir. (Sağ tarafın fark açı kosinüs formülüne göre açılıp sol tarafa eşitlenmesiyle $A = C\cos\phi$, $B = C\sin\phi$ ve $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ olduğu görülebilir. Buradaki C, önceki c değildir.)

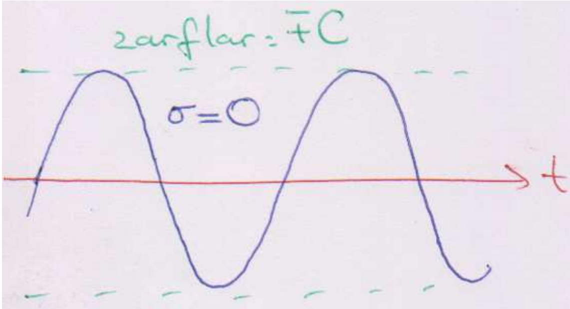
Burada da σ değerine göre üç seçenek vardır. Fazını önemsemeden çizelim, düşey ekseni göstermeden:





Sıfır geçişlerinin düzenli adımlarla olduğuna dikkat.

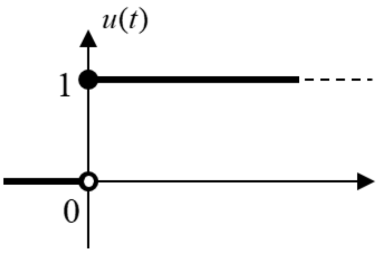
Asıl eğriyi içine alan ve sınırlarda ona teğet olan hayali eğriye “zarf (*envelope*)” denir.



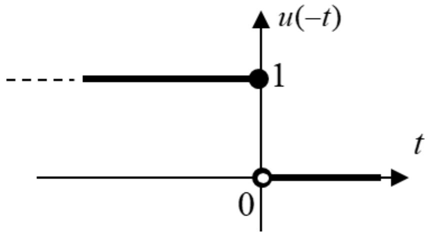
Sinüzoidal sinyaller, üstel sinyallerin özel bileşimleridir. Böyle düşünmek bazen kolaylık sağlar.

2. Birim Basamak $u(t)$ (*unit step*):

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ ise} \\ 1 & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

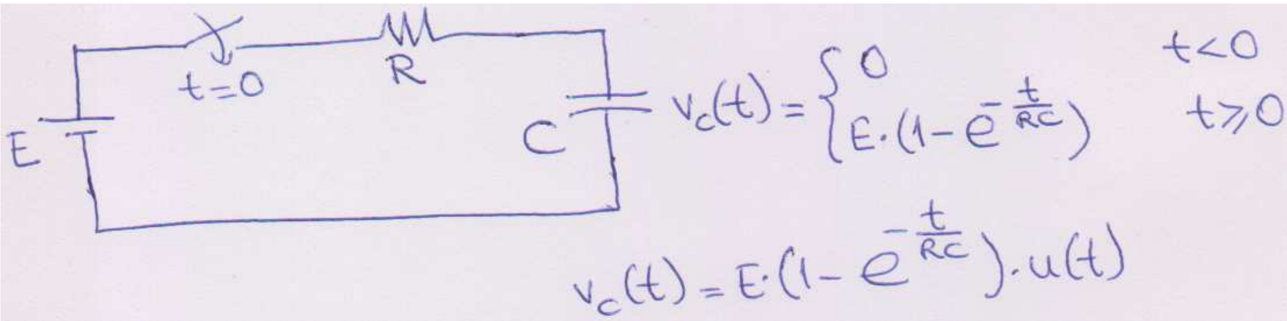


Sağdaki ise yansıtılmışıdır.

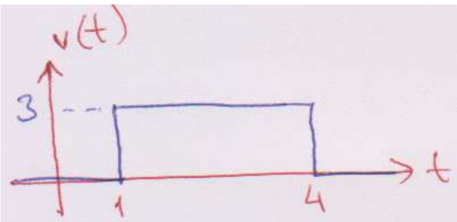


Anahtarlamaları ve parçalı sabitleri ifade etmede kullanışlıdır.

Örnek:



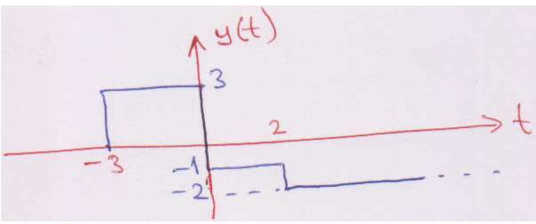
Örnek:



Şekildeki sinyali basamak sinyaller cinsinden yazalım:

$$v(t) = 3u(t-1) - 3u(t-4)$$
$$= 3\big(u(t-1) - u(t-4)\big)$$

Örnek:



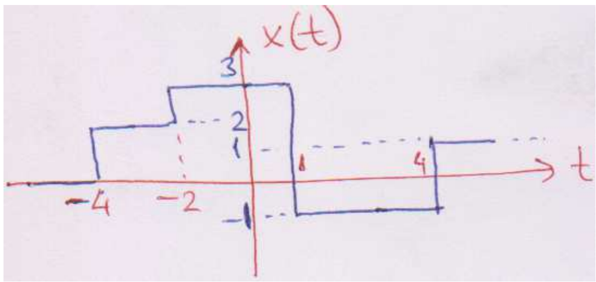
Şekildeki sinyali basamak sinyaller cinsinden yazalım:

$$y(t) = 3u(t+3) - 4u(t) - u(t-2)$$

Örnek:

$x(t) = 2u(t+4) + u(t+2) - 4u(t-1) + u(t-4)$

sinyalini çizelim (yanda):

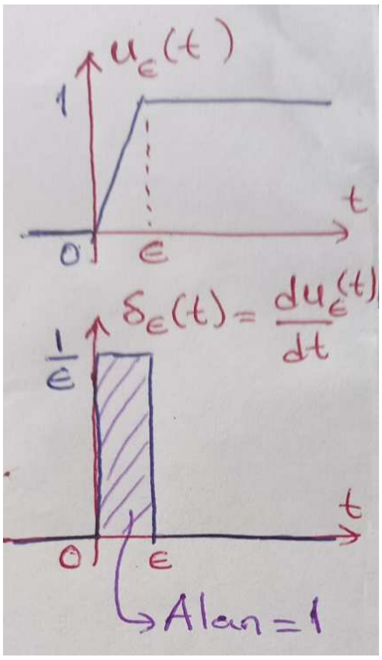


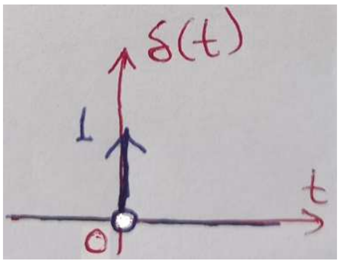
3. Birim Darbe $\delta(t)$ (*unit impulse*):

"Birim dürtü" adıyla da anılır. Birim basamak sinyalin türevi olarak tanımlanır:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Bu sinyali anlamak için limit yaklaşımı kullanalım ve şu iki sinyali tanımlayalım:





Limit $\epsilon \to 0$ durumunda -bir noktalık kaymayı sorun etmezsek-

$$u_\epsilon \to u$$

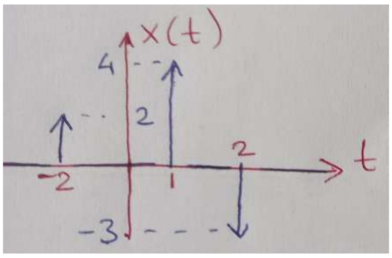
$$\delta_\epsilon \to \delta$$

Ancak $\epsilon \to 0$'a giderken, şeklin altındaki alan hiç değişmez, hep 1'dir.

Genliğin sonsuz ve kalınlığın sonsuz küçük olması bir okla temsil edilerek çizilir. Okun uzunluğu genlik değil, darbe altında kalan alan kadar gösterilir.

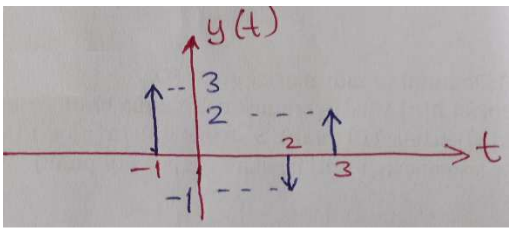
Örnek:

$x(t) = 2\delta(t+2) + 4\delta(t-1) - 3\delta(t-2)$ sinyalini çizelim:



Örnek:

Aşağıdaki sinyali yazalım:



$$y(t) = 3\delta(t+1) - \delta(t-2) + 2\delta(t-3)$$

TEMEL AYRIK ZAMAN SİNYALLERİ

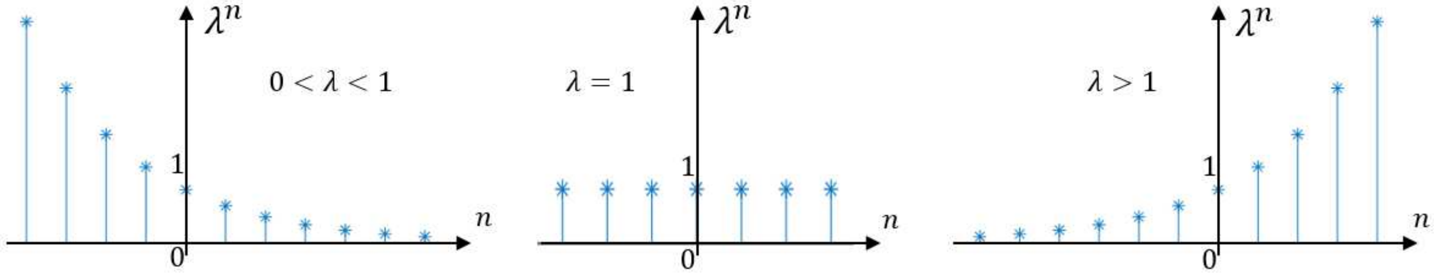
1. Üstel Sinyaller

$$\lambda^n$$

biçimindeki sinyallerdir (e üzeri biçiminde yazmak mümkündür ama kullanışsız olur).

a) λ gerçel ve artı ise:

$\lambda > 0$ değerine göre üç seçenek vardır:



Sabitleri $c = c \cdot 1^n$ diye üstel düşünmek bazen kolaylık sağlar.

b) λ karmaşık veya "gerçel ve eksi" ise:

$r > 0$ ve ω gerçel olmak üzere $\lambda = re^{j\omega}$ diyelim (sürekli zaman sinyallerinde λ'yı Kartezyen göstermek kolaylık idi, ama burada kutupsal veya üstel gösterim kullanışlıdır). Eğer $\lambda < 0$ gerçel ise $r = |\lambda|$ ve $\omega = \pi$ olur.

$$\lambda^n = r^n e^{j\omega n}$$

Ancak böyle karmaşık sinyallerle zaman uzayında tek başına pek karşılaşmayız. Genellikle eşlenik çift toplamı şeklinde karşılaşırız ve bu toplam gerçel olarak da ifade edilebilir. Buna $y[n]$ diyelim:

$$y[n] = c\lambda^n + c^*\lambda^{*n} = cr^n e^{j\omega n} + c^* r^n e^{-j\omega n}$$

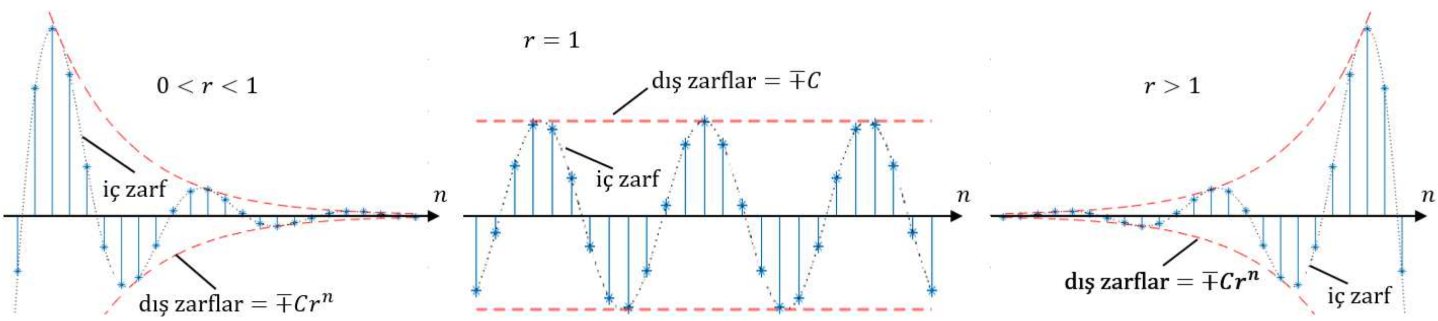
$e^{j\omega n} = \cos[\omega n] + j\sin[\omega n]$ ve $e^{-j\omega n} = \cos[\omega n] - j\sin[\omega n]$ yerine yazılırsa:

$$y[n] = \underbrace{(c + c^*)}_{A\text{ (gerçel)}} r^n \cos[\omega n] + \underbrace{j\,\underbrace{(c - c^*)}_{\text{sanal}}}_{B\text{ (gerçel)}} r^n \sin[\omega n]$$

$$y[n] = Ar^n \cos[\omega n] + Br^n \sin[\omega n] = Cr^n \cos[\omega n - \phi]$$

biçiminde de yazılabilir. (Sağ tarafın fark açı kosinüs formülüne göre açılıp sol tarafa eşitlenmesiyle $A = C\cos\phi$, $B = C\sin\phi$ ve $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ olduğu görülebilir. Buradaki C, önceki c değildir.)

Burada da r değerine göre üç seçenek vardır. Fazını önemsemeden çizelim, düşey ekseni göstermeden:



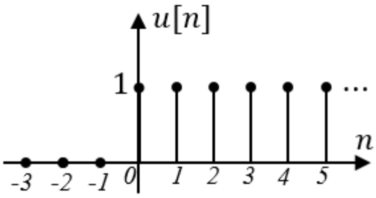
Sürekli gibi düşünülerek noktalı çizgiyle gösterilen ve ayrık çizimin kendisinden örnekleme aldığı fonksiyon iç zarf, iç zarfı içine alan ve sınırlarda ona teğet olan hayali eğriye de (kesikli kırmızı çizgiyle çizilen) "dış zarf"tır.

Sinüzoidal sinyaller, üstel sinyallerin özel bileşimleridir. Böyle düşünmek bazen kolaylık sağlar.

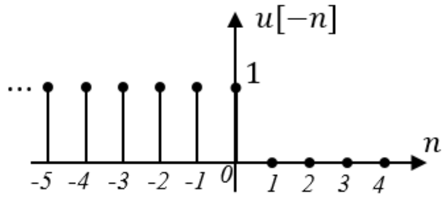
Dikkat edilirse burada sadece $\lambda = 0$ (yani $r = 0$) durumu gösterilmemiştir. Neden acaba?

2. Birim Basamak $u[n]$ (*unit step*):

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ ise} \\ 1 & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



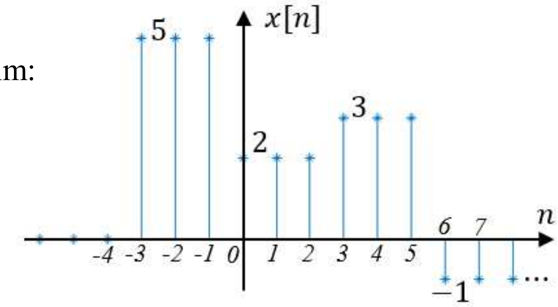
Sağdaki ise yansıtılmışıdır.



Anahtarlamaları ve parçalı sabitleri ifade etmede kullanışlıdır.

Örnek:

Yandaki şekildeki $x[n]$ sinyalini basamak sinyaller cinsinden yazalım:



Değişimlerde yeni değer alınan anlarda gelen basamak bileşeninin parantez içi o anda sıfır olmalıdır. O bileşenin katsayısı ise seviye değişimi kadar olmalıdır:

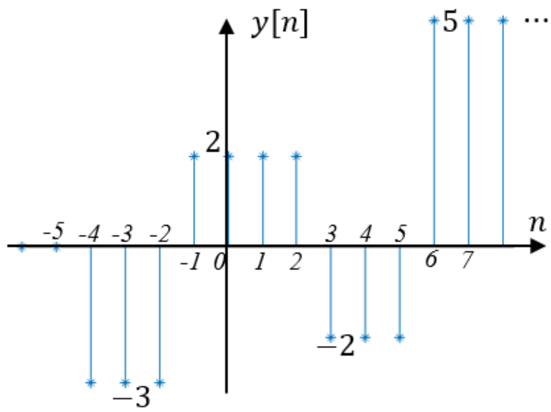
$$x[n] = 5u[n+3] - 3u[n] + u[n-3] - 4u[n-6]$$

Örnek:

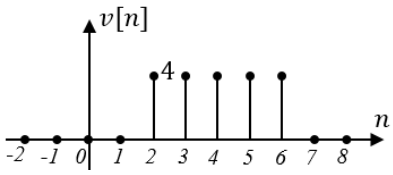
$y[n] = -3u[n+4] + 5u[n+1] - 4u[n-3] + 7u[n-6]$

sinyalini çizelim:

Parantez içini sıfır yapan anlara göre soldan sağa sıralı yazılmışsa, ve ayrıca terim (sabit gibi) yoksa, eksi sonsuz anlarından sıfır değeriyle gelir. Parantez içlerini sıfır yapan anlarda sıradaki terimin katsayısı kadar seviye değişimiyle yeni değerini alır. Yandaki şekil bulunur.



Örnek:



Yandaki sinyali basamaklar cinsinden yazalım:

$$v[n] = 4(u[n-2] - u[n-7])$$

3. Birim Darbe $\delta[n]$ (*unit impulse*):

"Birim dürtü" adıyla da anılır. Sürekli zamanlıda birim darbenin, birim basamak sinyalin türevi olmasına benzer nasıl tanımlanabileceğini düşünelim. Sürekli zamanlı bir $f(t)$ fonksiyonunun zamana göre soldan türevi:

$$\dot{f}(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(t) - f(t-\epsilon)}{\epsilon}$$

diye tanımlanır. Sağdan türev ise $\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$ olup canlı çalışmalarda, yani t gerçek zaman iken geleceğe ait $f(t+\epsilon)$ bilgisine bağlı olduğu için birçok durumda kullanışlı olmaz. Bu yüzden soldan türev ile devam edelim ve ayrık zamanlı benzeri ne olabilir diye düşünelim. Ayrık zamanlıda t zamanı yerine n tamsayı zaman değişkeni gelir. ϵ da tamsayı olmalıdır ve sıfırdan büyük en küçük değeri $\epsilon = 1$'dir. Buna göre bulduğumuz ifadeye $f[n]$ gibi bir sinyalin "soldan farkı" deriz:

$$f[n] \text{ 'in soldan farkı} = f[n] - f[n-1]$$

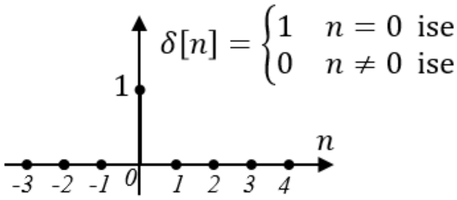
Bu anlamda, birim darbe sinyali, birim basamak sinyalin soldan farkı olarak tanımlanır:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$n < 0$ anlarında $u[n] = u[n-1] = 0$ olduğundan $\delta[n]$ sıfırdır.

$n > 0$ anlarında $u[n] = u[n-1] = 1$ olduğundan $\delta[n]$ yine sıfırdır.

$n = 0$ anında ise $u[n] = 1$ ve $u[n-1] = u[-1] = 0$ olduğundan $\delta[0] = 1\ olur$.



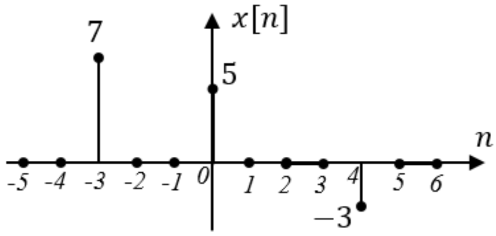
$\delta[0] = 1$ değeri, sürekli zamanlıdaki gibi bir alan ifadesi değildir. Sonsuza giden bir değer değildir, normal 1 değeridir. Dolayısıyla okla gösterilmez. Ayrık zamanlı normal sonlu bir sinyal gibi gösterilir.

$\delta[n]$ sinyalinin toplandığı sinyale etkisi kalıcı (birikimli) değildir, bir anlıktır.

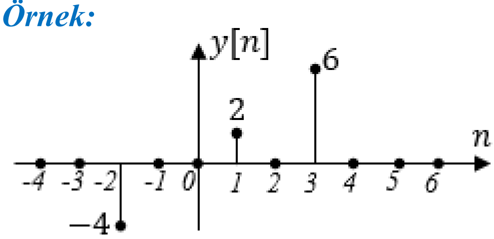
Örnek:
$x[n] = 7\delta[n+3] + 5\delta[n] - 3\delta[n-4]$

sinyalini çizelim.

Her bir darbe bileşeni, parantez içini sıfır yapan anda, katsayısı kadar katkıda bulunur sinyal toplamına. Sağdaki şekil elde edilir.



Örnek:

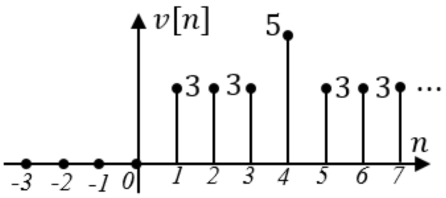


Yandaki sinyali darbeler cinsinden yazalım:

Sıfırdan farklı anlardaki değeri kadar katsayılı darbe bileşenleri yazıyoruz, ilgili anda parantez içi sıfır olacak biçimde:

$$y[n] = -4\delta[n+2] + 2\delta[n-1] + 6\delta[n-3]$$

Örnek:



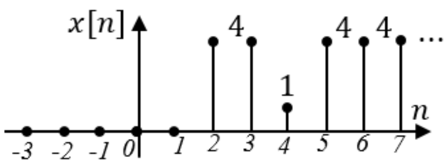
Yandaki sinyali basamak ve darbeler cinsinden, en az sayıda terimle yazalım:

Eğer $n = 4$ anındaki değer de 3 olsaydı, $v[n]$ için $3u[n-1]$ diyebilirdik. Ama yalnız $n = 4$ anında 2 birimlik bir katkı getiren bir terim daha eklemeliyiz:

$$v[n] = 3u[n-1] + 2\delta[n-4]$$

Örnek:
$x[n] = 4u[n-2] - 3\delta[n-4]$ sinyalini çizelim:

Darbe terimi olmasaydı, 2 anından itibaren 4, öncesinde sıfır değerli bir şekil çizerdik. Ancak $-3\delta[n-4]$ terimi yalnız $n = 4$ anında sinyal değerini 3 birim azaltarak 1 yapar. Yandaki şekil bulunur.



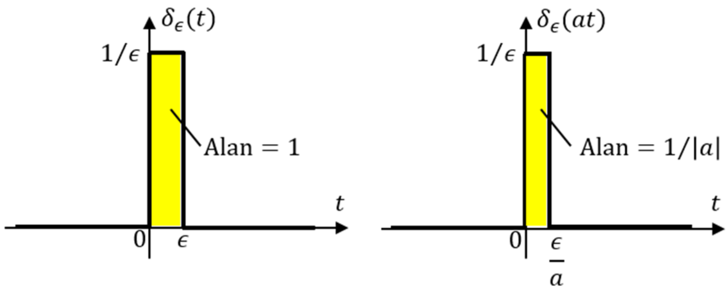
Darbe Sinyalin Özellikleri

1) Çift sinyaldir.

$$\delta[-n] = \delta[n] \qquad , \qquad \delta(-t) = \delta(t)$$

(Sürekli zaman birim darbe sinyalini limit ile tanımlarken görmezden gelinen bir noktalık kayma düzeltilmiş oluyor.)

2) $\delta[an] = \delta[n] \qquad , \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)\,, \ a \neq 0$



Ayrık zamanlıda sadece $n = 0$ için sıfırdan farklı değer (1) aldığı için bu iddianın doğruluğu açıkça görülmektedir. Sürekli zamanlıda ise limit yaklaşımıyla sağda gösterildiği gibi alan $1/|a|$ olmaktadır ($a < 0$ olsa da yatay eksenin üstündeki alan artı olduğu için). Limit $\epsilon \to 0$ için darbe katsayısı alanı ifade ettiği için katsayı $1/|a|$ olur.

3)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] = 1 \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

$$n_1 \leq n_0 \text{ ve } n_2 \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=n_1}^{n_2} \delta[n - n_0] = 1 \qquad , \qquad t_1 < t_0 \text{ ve } t_2 > t_0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)dt = 1$$

$$n_0 \notin [n_1, n_2] \Rightarrow \sum_{n=n_1}^{n_2} \delta[n - n_0] = 0 \qquad , \qquad t_0 \notin [t_1, t_2] \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)dt = 0$$

4)

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] \qquad , \qquad \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

Çünkü; toplam ya da integralin üst sınırı negatif ise darbenin sıfırdan farklı kısmı kapsama girmediği için sonuç sıfırdır, üst sınır negatif değilse sıfırdan farklı kısım da kapsanır ve bunun toplamı ya da alanı 1 olur. Negatif anlarda sıfır, negatif olmayan anlarda 1 değerini veren sinyal ise birim basamaktır.

5)

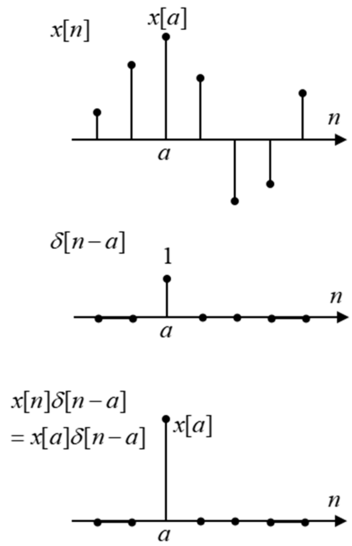
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k] = u[n] \qquad , \qquad \int_{\tau=0}^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau = u(t)$$

İspatı "Bir Sinyalin Darbeler Toplamı ya da İntegrali Olarak İfade Edilmesi" konusunun örneği olacaktır.

6) *Bir Sinyalin Bir Darbe ile Çarpımı*

$$\boxed{x[n]\delta[n-a]=x[a]\delta[n-a]} \quad , \quad \boxed{x(t)\delta(t-a)=x(a)\delta(t-a)}$$

Dikkat edilirse eşitliklerin sol taraflarında değişken olan darbe katsayıları, darbenin sıfırdan farklı olduğu an değerleriyle sabit olarak yazılabilmektedir. Çünkü diğer anlardaki katsayı, zaten darbenin sıfır olan değeriyle çarpıldığından eşitliği bozmamaktadır. Diğer bir ispatı sürekli zamanlıdaki limit hesabına girmemek için sadece ayrık zamanlıda yandaki gibi gösterebiliriz.



Bu formüller, çok karmaşık gibi görünen ve darbe içeren toplam ya da integrallerin kolayca hesaplanmasına yarar.

Örnek:

$$\int_0^5 t^2\cos(\ln 5t)\,\delta(t-2)dt=\int_0^5 2^2\cos(\ln 10)\,\delta(t-2)dt$$

$$=4\cos(\ln 10)\underbrace{\int_0^5 \delta(t-2)dt}_{1}=4\cos(\ln 10)$$

İntegral sınırları darbenin sıfırdan farklı olduğu anı kapsamasaydı, mesela 3'ten 7'ye olsaydı integral sıfıra eşit olurdu.

Burada çok yapılan bir çift hata şudur:

$$\int_0^5 t^2\cos(\ln 5t)\,\delta(t-2)dt\ \cancel{=\int_0^5 2^2\cos(\ln 10)\,dt}\ \cancel{=4\cos(\ln 10)}$$

Birinci hata, darbeyi yazmamaktır. İkinci hata ise sabitin integralini doğrudan o sabite eşitlemektir (İntegral sınırları farkı ile o sabitin çarpımı olmalıydı). Sonuç doğru olsa da aslında bu iki yanlışlı bir cevaptır.

Örnek:

$$\sum_{n=2}^{6}2^n\tan\left[\frac{\pi n}{6}\right]\delta[n-4]=\sum_{n=2}^{6}2^4\tan\left(\frac{4\pi}{6}\right)\delta[n-4]$$

$$=16\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\underbrace{\sum_{n=2}^{6}\delta[n-4]}_{1}=-16\sqrt{3}$$

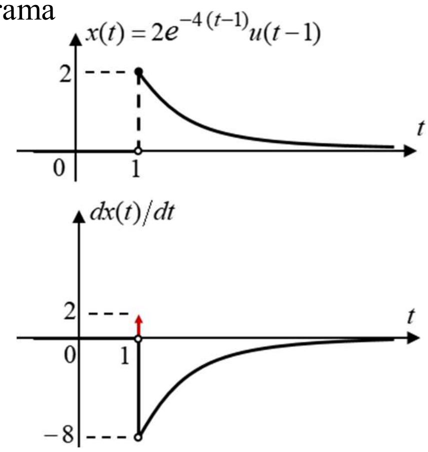
Toplam sınırları darbenin sıfırdan farklı olduğu anı kapsamasaydı, mesela 0'dan 3'e olsaydı toplam sıfıra eşit olurdu.

7) Aşağıdaki özellik, sadece listenin eksik kalmaması için buraya yazılmıştır. "Konvolüsyon" konusu görülürken anlatılacaktır ve buradaki "*" işareti çarpma değil konvolüsyon işaretidir. <u>Bir sinyalin bir darbeyle konvolüsyonu:</u>

$$\boxed{x[n]*\delta[n-a]=x[n-a]} \quad , \quad \boxed{x(t)*\delta(t-a)=x(t-a)}$$

8) Parçalı sürekli bir sinyalin türevinde, sıfırdan farklı değerini sıçrama noktasında alan ve katsayısı sıçrama miktarı olan bir darbe ortaya çıkar.

<u>*Örnek:*</u> $x(t)=2e^{-4(t-1)}u(t-1) \quad \Rightarrow \quad dx(t)/dt=?$



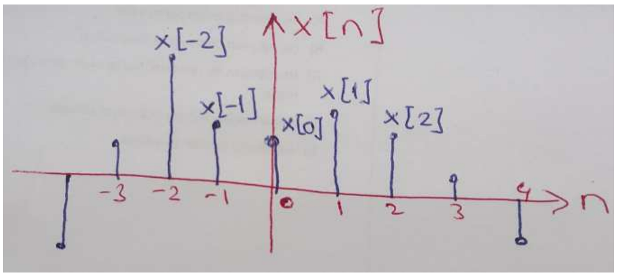
Çözüm:

$$\frac{dx(t)}{dt}=-8e^{-4(t-1)}u(t-1)+\underbrace{2e^{-4(t-1)}\delta(t-1)}_{2e^{-4(1-1)}\delta(t-1)}$$

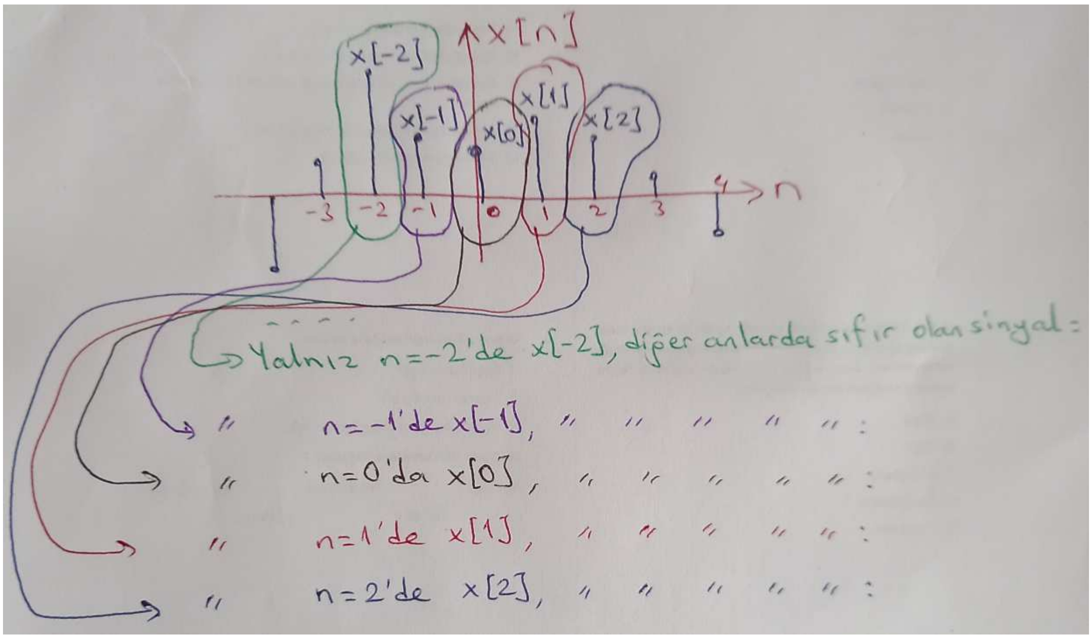
$$\frac{dx(t)}{dt}=-8e^{-4(t-1)}u(t-1)+2\delta(t-1)$$

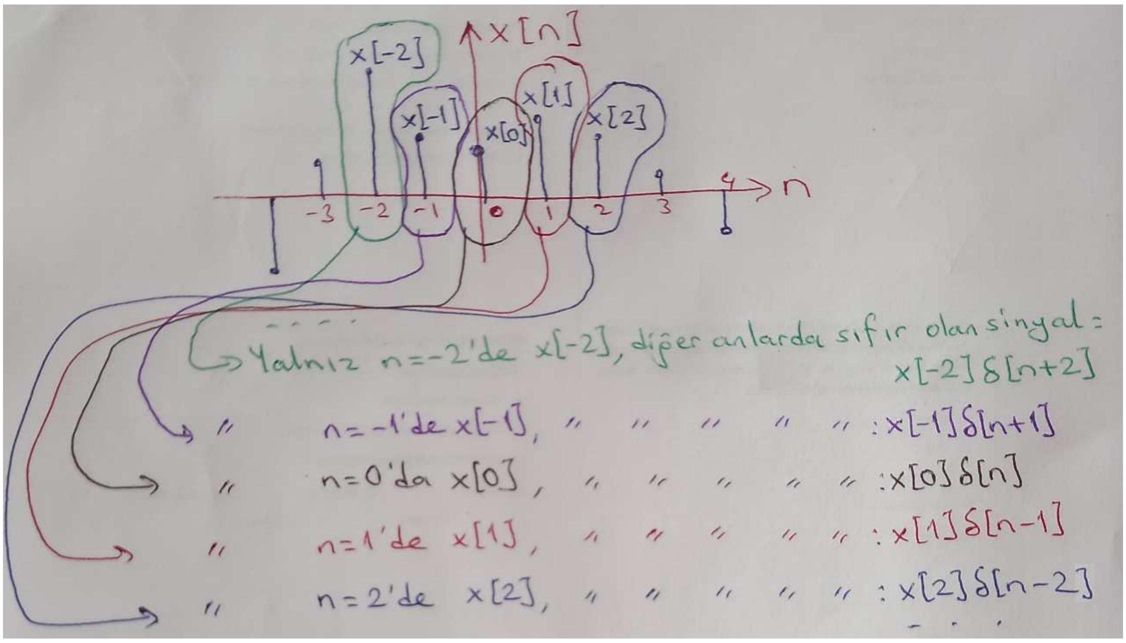
Bir Sinyalin Darbeler Toplamı ya da İntegrali Olarak İfade Edilmesi

Ayrık Zamanlıda:



Bu sinyali darbe bileşenlerinin toplamı olarak yazalım.



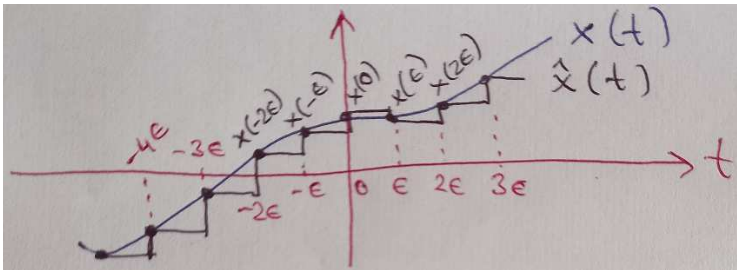


Hepsinin toplamı ilk sinyali verir:

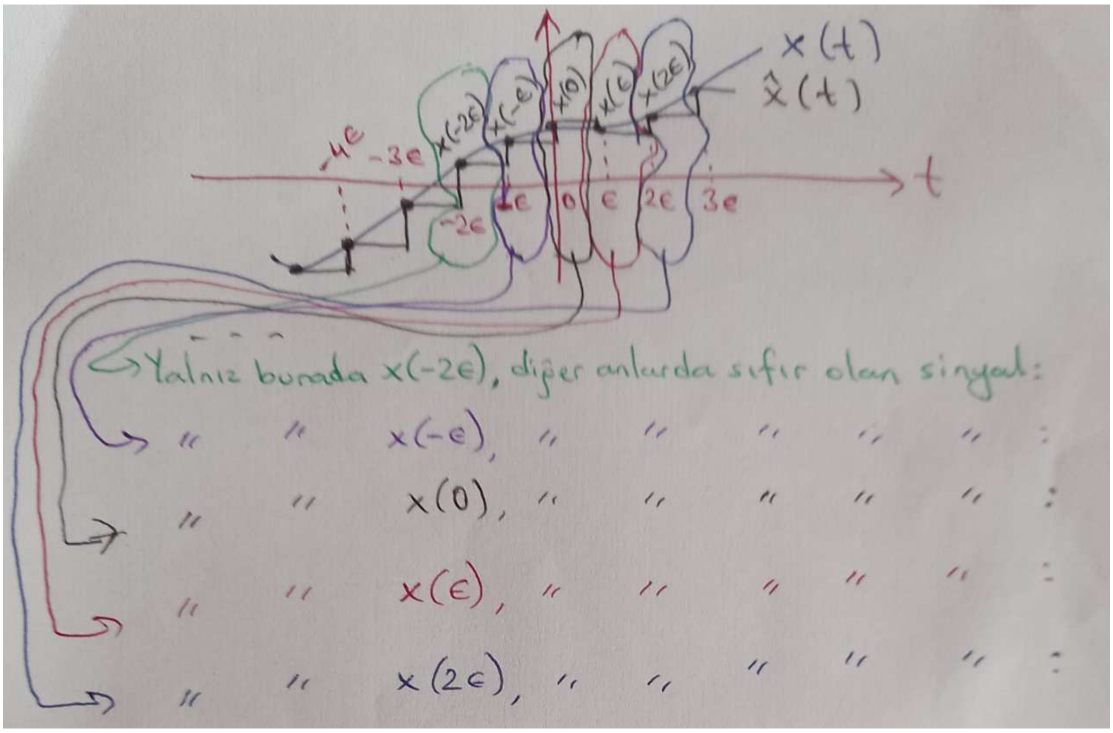
$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

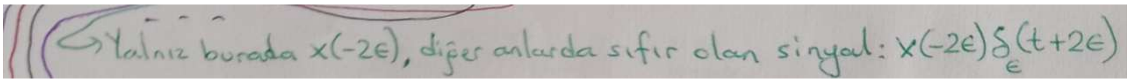
$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

Sürekli Zamanlıda:

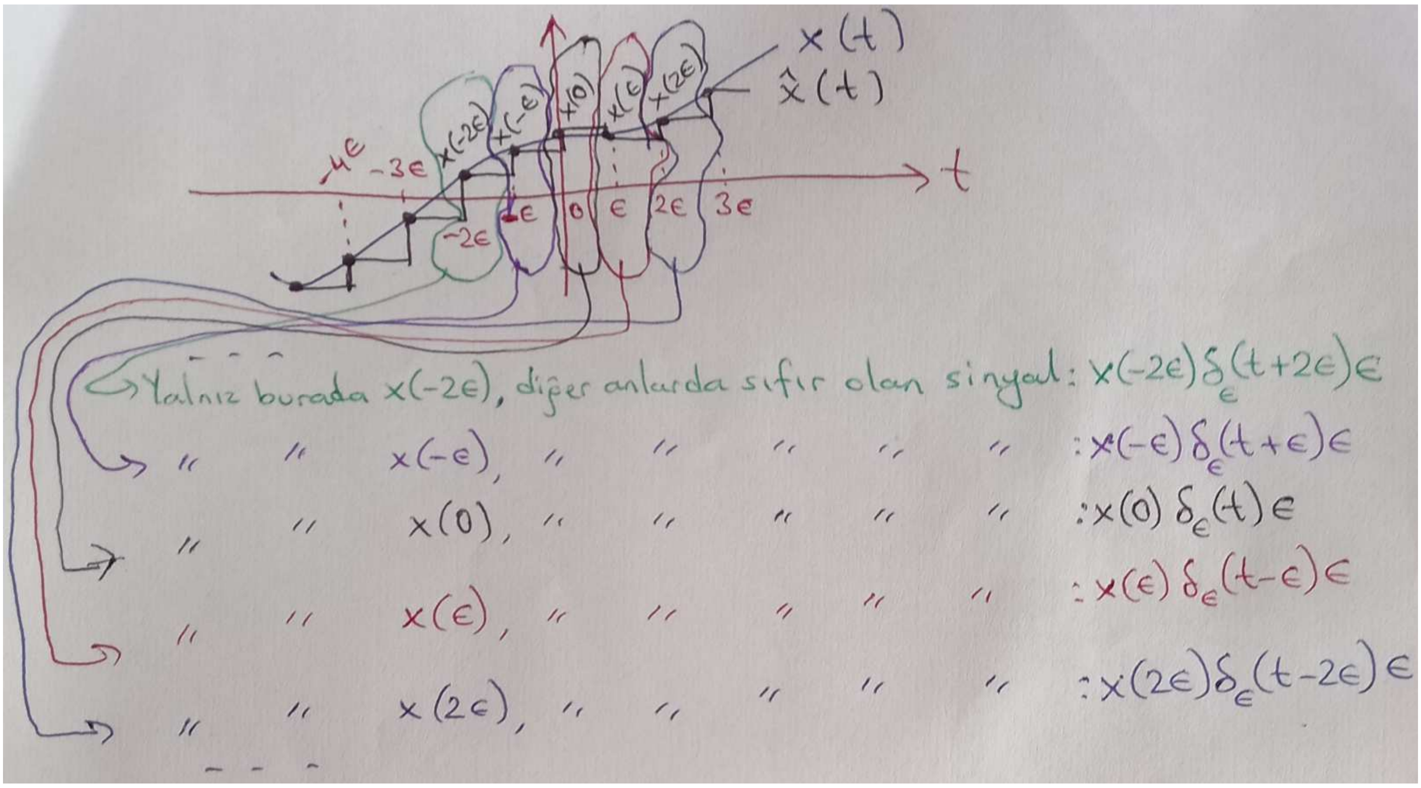


Bu sinyali darbe integrali olarak yazalım.





diyebilir miyiz?



Tüm bunların toplamı hangi sinyali verir?

$x(t)$ değil $\hat{x}(t)$ sinyalini verir:

$$\hat{x}(t) = \cdots + x(-2\epsilon)\delta_\epsilon(t+2\epsilon)\epsilon + x(-\epsilon)\delta_\epsilon(t+\epsilon)\epsilon + x(0)\delta_\epsilon(t)\epsilon + x(\epsilon)\delta_\epsilon(t-\epsilon)\epsilon + x(2\epsilon)\delta_\epsilon(t-2\epsilon)\epsilon + \cdots$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\epsilon)\delta_\epsilon(t-k\epsilon)\epsilon$$

Limit olarak $\epsilon \to 0$'a giderken $\tau = k\epsilon$ dersek,

$$\epsilon \to d\tau$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \int_{\tau=-\infty}^{+\infty}$$

$$\delta_\epsilon \to \delta$$

$$\hat{x} \to x$$

Sonuçta:

$$\boxed{x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

Örnek:
$u[n]$ sinyalini darbeler toplamı halinde yazalım. Formülde sinyal yerine $u[n]$ yazarız:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]\delta[n-k]$$

$k < 0$ için $u[k] = 0$ olduğundan alt sınırı 0'a çekeriz. $k \geq 0$ için $u[k] = 1$ olduğundan çarpan olarak yazmayız:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

Diğer bir deyişle

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \cdots$$

Örnek:
$u(t)$ sinyalini darbe integrali halinde yazalım. Formülde sinyal yerine $u(t)$ yazarız:

$$u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$\tau < 0$ için $u(\tau) = 0$ olduğundan alt sınırı 0'a çekeriz. $\tau \geq 0$ için $u(\tau) = 1$ olduğundan çarpan olarak yazmayız:

$$u(t) = \int_{\tau=0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau$$

Darbe Sinyalin Özellikleri 5.si böylece ispatlanmış olur.