

# KARMAŞIK SAYILAR (Özet)

## Sanal Sayılar

Birim sanal sayı:  $j = \sqrt{-1}$

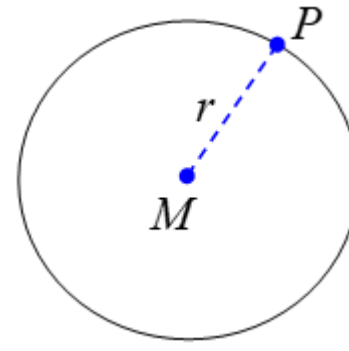
Sanal sayılar  $j \cdot b$  biçimindeki sayılardır ( $b$  gerçel).

## Sanal Sayıların Gerçel Sayı Doğrusuna Göre Konumu

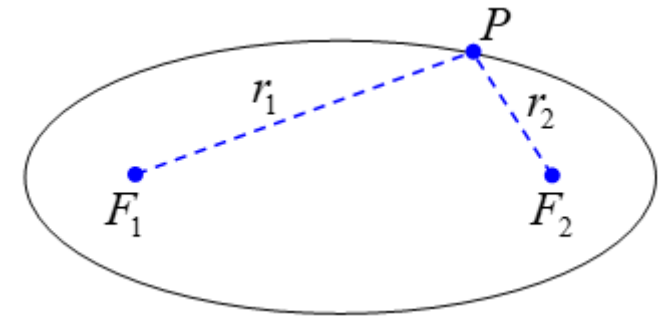
Sanal sayıların gerçel sayı doğrusuna göre nerede gösterilmesi gerektiğini bulmak için, geometrik yerini açıkça görebildiğimiz öyle bir büyüklük formülü üretelim ki bu formüldeki parametreleri ayarlayarak bu büyüklüğü istersek gerçel, istersek sanal yapabilelim.

Böylece formüldeki parametreleri ayarlayarak sanal yapacağımız büyüklüğün uzayda gerçel sayı doğrusuna göre konumunu da görebiliriz. Bu amaca uygun bir formül, elipsin odak koordinatları formülüdür.

Bilindiği gibi, düzlemde “*merkez*” adı verilen **bir** noktadan ( $M$ ) sabit uzaklıktaki noktalar kümesinin oluşturduğu şekle “**çember**” denilir.



Çember: Her  $P$  noktasında  $r$  sabit.



Elips: Her  $P$  noktasında  $r_1 + r_2$  sabit.

Benzer olarak, düzlemde “*odak*” adı verilen iki noktadan ( $F_1$  ve  $F_2$ ) uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar kümesi de “**elips**” olarak adlandırılır.

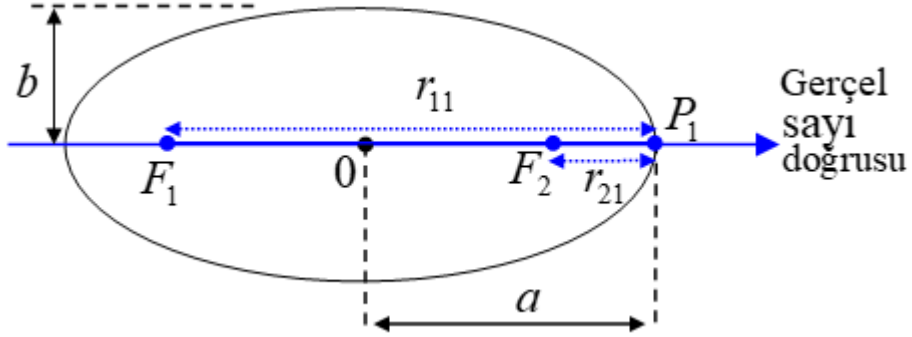
Şimdi, odakları gerçel sayı doğrusu üzerinde orijine göre simetrik  $F_1$  ve  $F_2$  koordinatlarında bulunan ve bu odaklar ile koordinat farklarının kareleri toplamının karekökleri toplamı  $(r_1 + r_2)$  sabit olan noktalar kümesinden oluşan düzlemsel şekli düşünelim.

(Elips benzeri ama tam olarak elips değil; çünkü *uzunluk* negatif olmayan anlamda kullanıldığı için *uzunluk* yerine *koordinat farklarının kareleri toplamının karekökleri toplamı* dedik.)

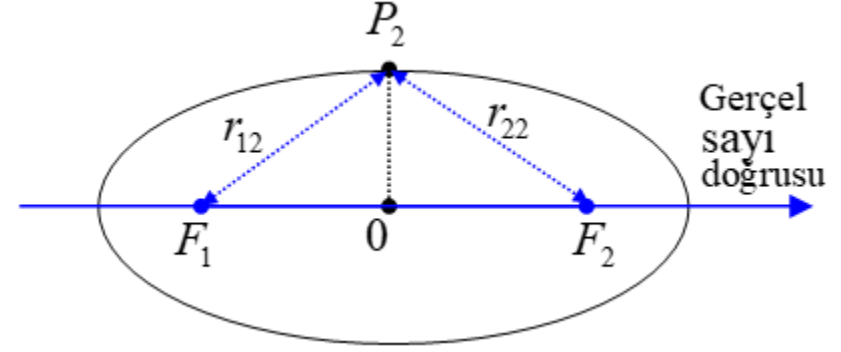
Şeklin yatay ve düşey olarak orijinden en büyük uzaklıkları sırasıyla  $a$  ve  $b$  (negatif olmayan gerçel) olsun.

İki özel  $P$  noktası kullanarak odak koordinatlarının formülünü bulalım:

Biri en sağdaki nokta, diğeri en üstteki nokta olsun.



$$r_{11} = a + F, \quad r_{21} = a - F$$



$$r_{12} = r_{22} = \sqrt{F^2 + b^2}$$

$$r_{11} + r_{21} = r_{12} + r_{22}$$

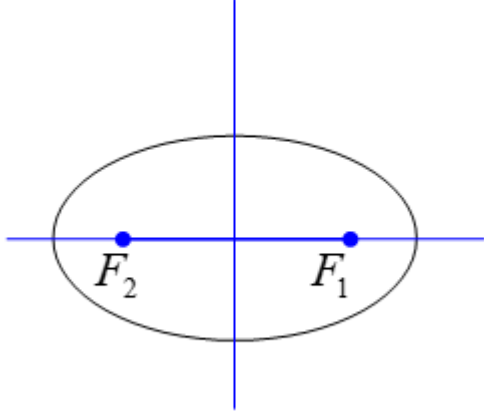
$$(a - F) + (a + F) = 2a = 2\sqrt{F^2 + b^2}$$

$$F = \mp \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$F_1 = -\sqrt{a^2 - b^2}, \quad F_2 = +\sqrt{a^2 - b^2}$$

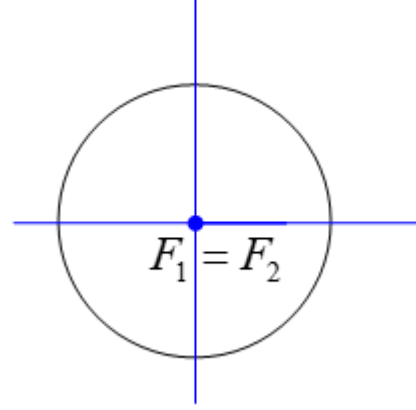
Baştan da amaçladığımız gibi,  $a$  ve  $b$  değerleri uygun bir biçimde seçilirse bu koordinatlar sanal sayı olabilmektedir.

$$F_1 = -\sqrt{a^2 - b^2} \quad , \quad F_2 = +\sqrt{a^2 - b^2}$$

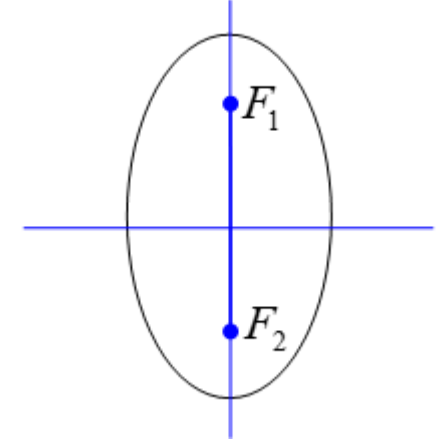


$a > b$  için bu biçimde olan şekil,

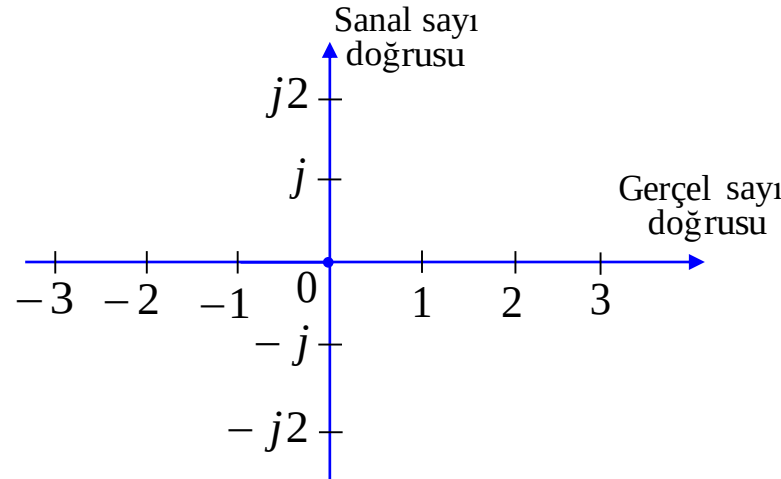
Bu kurgu problemden görüldüğü gibi sanal sayılar, gerçel sayı doğrusuna dik ve orijinden geçen bir doğru üzerinde yer almaktadır.



$a = b$  için elipsin özel bir hali olan çember biçimini alır ve odakları üst üste çakışarak çemberin merkezi haline gelirler.



$a < b$  olduğunda ise odak koordinatları sanal sayı olur. Bu durumda şeklin biçimi, soldaki şeklin  $90^\circ$  döndürülmüşü gibi olmaktadır. O halde yeni şeklin odakları da  $90^\circ$  döndürülmüş olacaktır.



Gerçel ve sanal sayı doğruları tarafından belirlenen düzleme “**karmaşık düzlem**” denir.

## Karmaşık Sayılar

$a$  ve  $b$  gerçel olmak üzere,  $c = a + jb$  biçiminde yazılabilen her  $c$  sayısı karmaşık sayıdır.

Bu gösterime, “karmaşık sayının Kartezyen gösterimi” denir.

$$\operatorname{Re}\{c\} = a$$

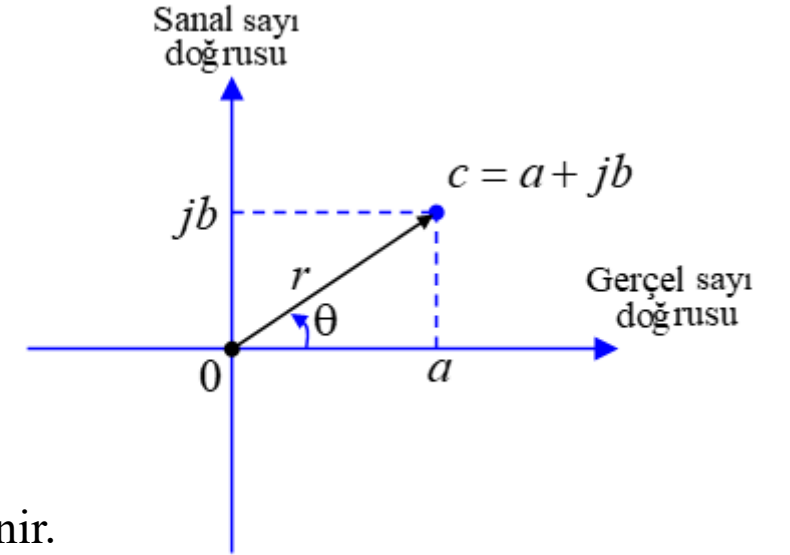
$$\operatorname{Im}\{c\} = b$$

Karmaşık sayılar, karmaşık düzlem üzerinde yatay koordinatı sayının gerçel kısmı, düşey koordinatı da sanal kısmı olan birer noktayla gösterilirler.

Karmaşık sayılar ayrıca, orijinden bu noktaya giden birer vektörle de gösterilebilirler.

Bu noktanın orijine olan mesafesi  $r$ , gerçel eksenin artı kısmıyla şekilde gösterilen yönde yaptığı açı da  $\theta$  ile gösterilerek

“karmaşık sayının kutupsal gösterimi” şöyle tanımlanır:  $c = r \angle \theta$



Burada  $r$  'ye “karmaşık sayının modülü”,  $\theta$  'ya ise “karmaşık sayının açısı” denir.

*Kutupsal gösterimden Kartezyen gösterime geçiş:*

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

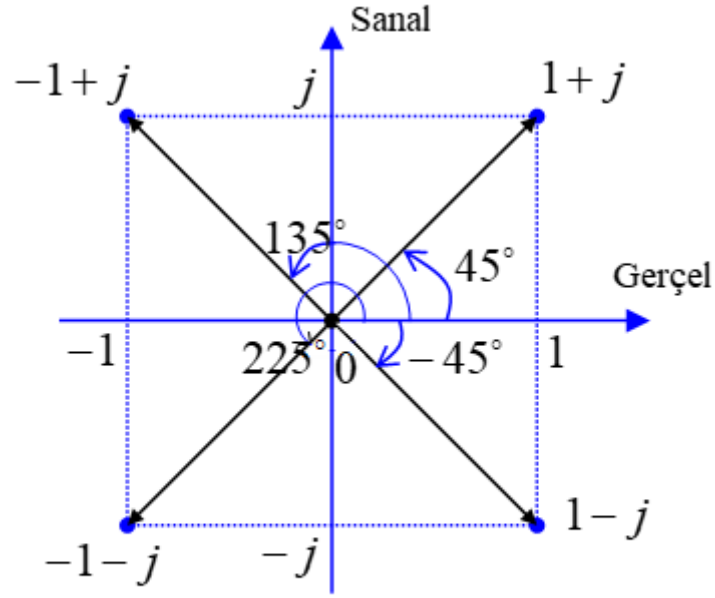
*Kartezyen gösterimden kutupsal gösterime geçiş:*

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fakat açığı bulurken dikkatli olmalıdır:

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(b/a) & a > 0 \text{ ise} \\ \tan^{-1}(b/a) \mp \pi & a < 0 \text{ ise} \\ \pi/2 & a = 0 \text{ ve } b > 0 \text{ ise} \\ -\pi/2 & a = 0 \text{ ve } b < 0 \text{ ise} \\ \text{belirsiz(önemsiz)} & a = b = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Örnekler:



Bazı karmaşık sayılar

$$1 = 1 \angle 0^\circ$$

$$-1 = 1 \angle 180^\circ = 1 \angle \pi$$

$$j = 1 \angle 90^\circ = 1 \angle (\pi/2)$$

$$-j = 1 \angle -90^\circ = 1 \angle (-\pi/2)$$

$$j4 = 4 \angle 90^\circ$$

$$-j5 = 5 \angle -90^\circ$$

$$1+j = \sqrt{2} \angle (\text{Arctan}(1)) = \sqrt{2} \angle 45^\circ = \sqrt{2} \angle (\pi/4)$$

$$1-j = \sqrt{2} \angle (\text{Arctan}(-1)) = \sqrt{2} \angle (-45^\circ)$$

$$-1+j = \sqrt{2} \angle (\text{Arctan}(-1) + 180^\circ) = \sqrt{2} \angle 135^\circ$$

$$-1-j = \sqrt{2} \angle (\text{Arctan}(1) + 180^\circ) = \sqrt{2} \angle 225^\circ$$

Limit önemliyse:  $\lim_{x \rightarrow 0} x + j\sqrt{3}x = 0 \angle \text{Arctan}\sqrt{3} = 0 \angle 60^\circ$

Limit önemli değilse:  $0 = 0 + j0 = 0 \angle (\text{belirsiz}) = 0 \angle 30^\circ = 0 \angle 90^\circ$

# Euler Formülü

Mutlak değeri 1, açısı ( $\theta$ ) değişken olan bir karmaşık sayıyı

$$y(\theta) = 1 \angle \theta = \cos \theta + j \sin \theta$$

biçiminde bir fonksiyon olarak düşünelim.

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta + j \cos \theta = jy(\theta)$$

olduğunu düşünerek yeniden  $y(\theta)$ 'yı çözmeye çalışalım.

$$\frac{dy(\theta)}{y(\theta)} = j d\theta$$

Her iki tarafın belirsiz integralini alırsak  $k$  integral sabiti ve  $K = e^k$  olmak üzere

$$\ln y(\theta) = j\theta + k \quad \rightarrow \quad y(\theta) = e^{j\theta} \cdot e^k = Ke^{j\theta}$$

bulunur. Kutupsaldan kartezyene dönüşümden faydalanarak

$$y(0) = \cos 0 = 1 = Ke^{j0} = K$$

bulunur.

Bunu da kutupsaldan kartezyene dönüşümle birlikte kullanırsak:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Özel durum 1)  $\theta = \mp \pi$  için:

$$e^{\mp j\pi} = -1$$

Bu eşitlik, veya  $e^{j\pi} + 1 = 0$  biçimiyle

bulunduğu 18. asırda matematikçiler tarafından “**asrın denklemi**” kabul edilmiştir.

Günümüzde bile matematikçilerin çoğu tarafından, matematik tarihinin gelmiş geçmiş en *zarif* denklemi kabul edilmektedir.

Buradaki zarafet, matematikteki en önemli sayılardan dördünü veya beşini, çok önemli ve sade bir eşitlikte bir araya getirmesidir.

Her ne kadar Euler’in adıyla meşhur olsa da aslında Euler daha 7 yaşındayken **Roger Cotes** 1714’te bulup yayınlamıştır.

Özel durum 2)  $\theta = 2k\pi$  için:  
( $k$  tamsayı)

$$e^{j2k\pi} = 1$$

## Karmaşık sayıların üstel gösterimi

$c = r\angle\theta$  gibi bir karmaşık sayı  $c = re^{j\theta}$  yazılabilir ki buna karmaşık sayının “üstel gösterimi” denir.

Buna göre  $c$  karmaşık sayısı,  $re^{j\theta} = r\angle\theta = (r \cos \theta) + j(r \sin \theta)$  biçimlerinde yazılabilir.

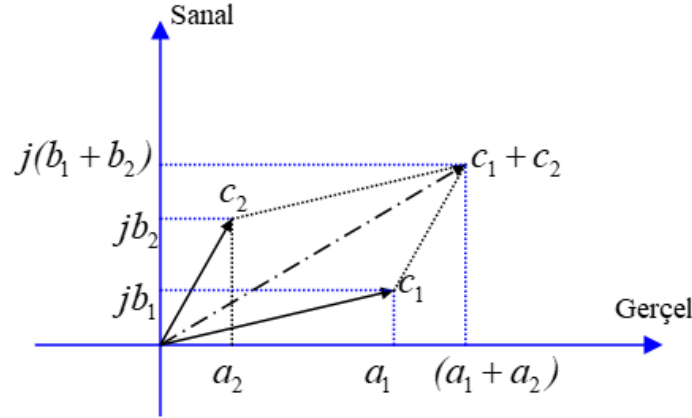
Kutupsal gösterimdeki  $r$  ve  $\theta$ , üstel gösterimdeki  $r$  ve  $\theta$  ile tamamen aynıdır. Bu yüzden karmaşık sayıların üstel gösterimle yapılan işlemlerinde, kutupsal gösterim kullanılmasıyla aynı yollar izlenir.

## Karmaşık sayılarla işlemler

### Toplama ve Çıkartma

Kartezyen gösterimle kolay yapılır.

$$\begin{aligned} c_1 \mp c_2 &= (a_1 + jb_1) \mp (a_2 + jb_2) \\ &= (a_1 \mp a_2) + j(b_1 \mp b_2) \end{aligned}$$



Yandaki gibi vektörel toplama şeklinde de düşünülebilir.

Dikkat!  $r_1\angle\theta_1 \mp r_2\angle\theta_2 \neq (r_1 \mp r_2)\angle(\theta_1 \mp \theta_2)$

### Eşlenik

$c = a + jb = r\angle\theta = re^{j\theta}$  gibi bir karmaşık sayının eşleniği

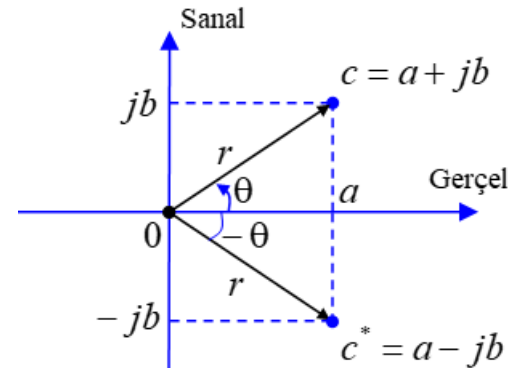
$c^* = a - jb = r\angle(-\theta) = re^{-j\theta}$  diye tanımlanır.

### Çarpma

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Kutupsal veya üstel gösterimle daha kolaydır:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (r_1\angle\theta_1) \cdot (r_2\angle\theta_2) = (r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2}) \\ &= (r_1 \cdot r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2) = (r_1r_2)e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$



Karmaşık sayının gerçel sayı doğrusuna göre simetriğidir.

## Mutlak Değer

$c = a + jb = r\angle\theta = re^{j\theta}$  gibi bir karmaşık bir sayının mutlak değeri:  $|c| = |r| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot c^*}$

Karmaşık sayının modülü ile mutlak değeri arasında küçük bir fark vardır.

Mutlak değer hiç eksi değer alamazken, modül eksi de olabilir. Zira  $r\angle\theta = (-r)\angle(\theta + \pi)$

## Bölme

Kartezyen gösterimle işlem biraz karışıktır. Payı ve paydayı, paydanın eşleniğiyle çarparak yapılan işlem basitleştirilebilir:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 c_2^*}{c_2 c_2^*} = \frac{c_1 c_2^*}{|c_2|^2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Bölmede de kutupsal veya üstel gösterim daha kullanışlıdır:  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\angle(\theta_1 - \theta_2) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = (r_1/r_2)e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

## Kuvvet Alma

Kuvvet (üs) alma işlemi için de kutupsal veya üstel gösterim kullanışlıdır.

Genel olarak  $c = r\angle\theta = re^{j\theta}$  gibi bir karmaşık sayının  $p$ . kuvveti,  $c^p = r^p e^{jp\theta} = r^p \angle(p\theta)$

$p$ 'nin tamsayı olduğu durumlarda bu tek cevaptır.

Ama sıfır olmayan  $n$  gibi bir tamsayı için  $p = 1/n$  ise bu,  $x^n = c$  gibi bir denklemin çözümü olduğu için  $n$  adet cevap vardır.  $r$ 'nin mutlak değer alınması tercihiyle bulalım.



$x^n = c = c \cdot 1 = c \cdot e^{j2k\pi} = re^{j(\theta+2k\pi)}$  ;  $k$  tamsayı. Yani açığı  $2\pi$ 'nin katları kadar farklı almak karmaşık sayıyı değiştirmez.

$k$  numaralı cevap:  $x_k = (c^{1/n})_k = \underbrace{r^{1/n}}_{\substack{+ \text{ gerçel} \\ \text{değer}}} e^{j\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \underbrace{r^{1/n}}_{\substack{+ \text{ gerçel} \\ \text{değer}}} \angle \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$  ;  $k = 1, \dots, n$  Farklı bir  $k$  tamsayısı yine bu değerlerden birini verir.

Örnek:

$$x = j^{1/2} = ?$$

Çözüm:  $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$$x_k = (j^{1/2})_k = e^{j(\frac{\pi}{4}+k\pi)} = e^{jk\pi} \cdot e^{j\pi/4} = (-1)^k e^{j\pi/4}$$

$$x_1 = -e^{j\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) \quad x_2 = e^{j\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

Örnek:  $x = 1^{1/3} = ?$

$$1 = e^{j0^\circ} = e^{jk \cdot 360^\circ} \rightarrow k=1, 2, 3 \text{ için } x_k = e^{jk \cdot 120^\circ}$$

$$x_1 = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = e^{j240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = e^{j360^\circ} = e^{j0^\circ} = 1$$

Örnek:

$$y = (-8)^{1/3} = ?$$

$$-8 = 8e^{j180^\circ} = 8e^{j(180^\circ+k \cdot 360^\circ)}$$

$$y_k = (-8)^{1/3} = 8^{1/3} e^{j(180^\circ+k \cdot 360^\circ)/3} = 2e^{j(60^\circ+k \cdot 120^\circ)}$$

$$y_1 = 2e^{j180^\circ} = -2$$

$$y_2 = 2e^{j300^\circ} = 2e^{-j60^\circ} = 1 - j\sqrt{3}$$

$$y_3 = 2e^{j420^\circ} = 2e^{j60^\circ} = 1 + j\sqrt{3}$$

## Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyon İlişkileri

Euler formülünü  $+\theta$  ve  $-\theta$  için ayrı ayrı yazalım:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

Bunların toplamı  $2 \cos \theta$  olduğundan:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}} = \cosh(j\theta)$$

Üsttekinden alttakini çıkarınca  $j2 \sin \theta$  olduğundan:

$$\boxed{\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}} = -j \sinh(j\theta)$$

## Moivre Formülü

$(e^{j\theta})^p = e^{j(p\theta)}$  olduğu için Euler denkleminin sağ tarafının  $p$ . kuvvetini, Euler denkleminde açı yerine  $p\theta$  yazarak bulacağımız ifadeye eşitleyebiliriz:

$$\boxed{(\cos \theta + j \sin \theta)^p = \cos(p\theta) + j \sin(p\theta)}$$

Moivre formülü yardımıyla, özellikle  $p$  bir tamsayı olmak üzere  $\cos p\theta$  ve  $\sin p\theta$  değerleri,  $\cos \theta$  ve  $\sin \theta$  cinsinden kolayca ifade edilebilir. Mesela  $p = 2$  için:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + j \sin 2\theta &= (\cos \theta + j \sin \theta)^2 \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + j2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$