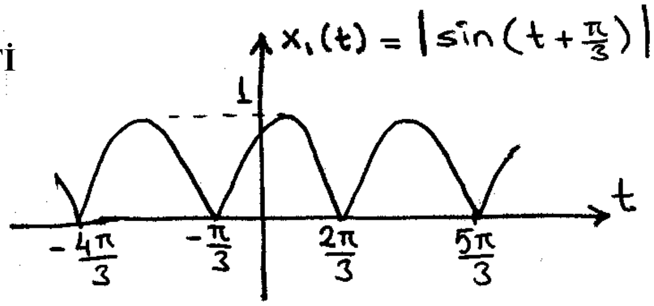
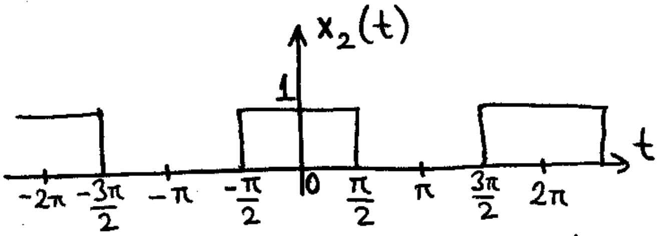
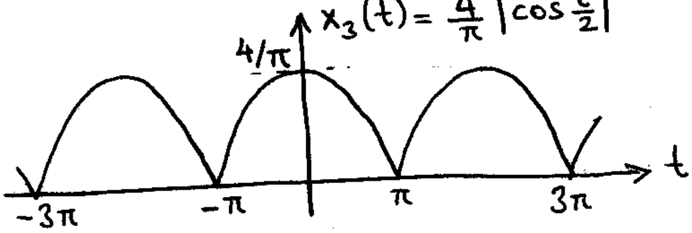
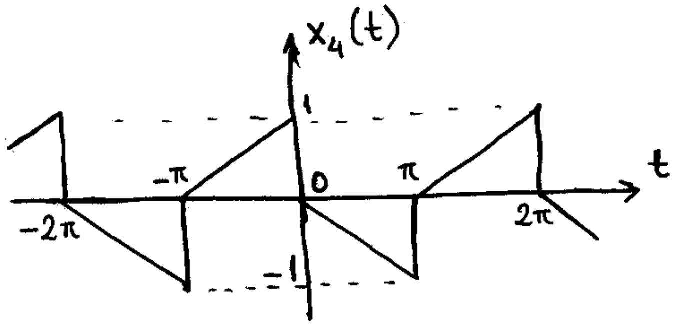
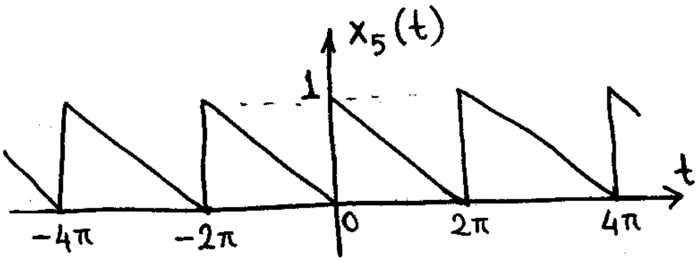
FOURİER SERİLERİ TESTİ

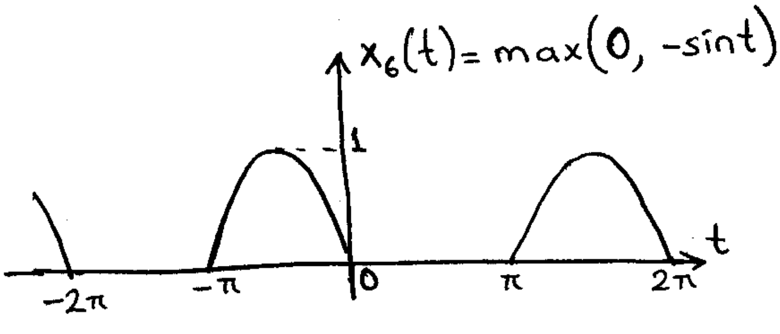












Buradaki sinyallerin,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right)$$

biçiminde yazılan gerçel Forier serilerini, verilen $x_A(t), \ldots, x_F(t)$ serileri ile eşleştiriniz. Simetri özelliklerinden faydalanınız. Burada verilen her sinyal ve her seri için bu eşleşmeler, simetri özelliklerinden görülebilmektedir.

$$x_A(t)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin t+\left\{-\frac{2}{3\pi}\cos 2t-\frac{2}{15\pi}\cos 4t-\frac{2}{35\pi}\cos 6t-\dots\right\}$$

$$b_k=0\quad k\neq 1 \text{ için},\qquad b_1=-\frac{1}{2},\qquad a_0=\frac{2}{\pi},\qquad a_k=\begin{cases}0 & k \text{ tekse}\\ \dfrac{-2}{(k^2-1)\pi} & k \text{ çiftse}\end{cases}$$

$$x_B(t)=\frac{2}{\pi}+\left\{\frac{2}{3\pi}\cos 2t+\frac{2}{15\pi}\cos 4t+\frac{2}{35\pi}\cos 6t+\dots\right\}+\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\sin 2t-\frac{2\sqrt{3}}{15\pi}\sin 4t+0\cdot\sin 6t+\dots\right\}$$

n bir tamsayı olmak üzere,

$$a_0=\frac{4}{\pi},\quad a_k=\begin{cases}\dfrac{2}{(4k^2-1)\pi} & k=3n+1 \text{ veya } k=3n+2 \text{ ise}\\ \dfrac{-4}{(k^2-1)\pi} & k=3n \text{ ise}\end{cases}\qquad b_k=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{3}}{(4k^2-1)\pi} & k=3n+1\\ \dfrac{-2\sqrt{3}}{(4k^2-1)\pi} & k=3n+2\\ 0 & k=3n\end{cases}$$

$$x_C(t)=\left\{\frac{4}{\pi^2}\cos t+\frac{4}{9\pi^2}\cos 3t+\frac{4}{25\pi^2}\cos 5t+\dots\right\}-\left\{\frac{2}{\pi}\sin t+\frac{2}{3\pi}\sin 3t+\frac{2}{5\pi}\sin 5t+\dots\right\}$$

$$a_0=0,\qquad a_k=\begin{cases}\dfrac{4}{k^2\pi^2} & k \text{ tekse}\\ 0 & k \text{ çiftse}\end{cases}\qquad b_k=\begin{cases}\dfrac{-2}{k\pi} & k \text{ tekse}\\ 0 & k \text{ çiftse}\end{cases}$$

$$x_D(t)=\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{\pi}\sin t+\frac{1}{2\pi}\sin 2t+\frac{1}{3\pi}\sin 3t+\dots\right\}$$

$$a_0=1,\quad a_k=0\quad (k\neq 0),\qquad b_k=\frac{1}{k\pi}$$

$$x_E(t)=\frac{1}{2}+\left\{\frac{2}{\pi}\cos t-\frac{2}{3\pi}\cos 3t+\frac{2}{5\pi}\cos 5t\ -+\dots\right\}$$

$$a_0=1,\qquad a_k=\begin{cases}\dfrac{2}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2} & k \text{ tekse}\\ 0 & k \text{ çiftse}\quad (k\neq 0)\end{cases}\qquad b_k=0$$

$$x_F(t)=\frac{8}{\pi^2}+\left\{\frac{16}{3\pi^2}\cos t-\frac{16}{15\pi^2}\cos 2t+\frac{16}{35\pi^2}\cos 3t\ -+\dots\right\}$$

$$a_0=\frac{16}{\pi^2},\quad a_k=(-1)^{k+1}\frac{16}{(4k^2-1)\pi^2},\qquad b_k=0.$$

CEVAPLAR:

$x_1(t) = x_B(t)$

Çünkü $x_1(t)$ ne tek harmonik simetrisine sahiptir, ne tek ne de çift bir sinyaldir. Ne de düşey bir kaydırmayla bunlardan biri haline getirilebilir. O halde Fourier serisinde hem tek hem çift harmonikler, hem sin hem cos terimleri bulunacaktır. Aynı şeyler $x_6(t)$ için de söylenebilir. Ancak onda $T_0 = 2\pi$ olduğundan $\omega_0 = 1$ iken, $x_1(t)$ için $T_0 = \pi$ olduğundan $\omega_0 = 2$ olmaktadır. Burada ise yalnız $x_B(t)$'nin harmoniklerinin açısal frekansları 2'nin tam katlarıdır.

$x_2(t) = x_E(t)$

Çünkü $x_2(t)$ çift bir sinyaldir; serisinde sin terimleri bulunmaz. Ortalaması $a_0/2 = 1/2$ olup bu kadar eksiltilirse tek harmonik simetrisine sahip olur. Bu yüzden bu 0. terim dışında serisinde çift harmonik bulunmaz.

$x_3(t) = x_F(t)$

Çünkü $x_3(t)$ çift bir sinyaldir; serisinde sin terimleri bulunmaz. Ayrıca düşey kaydırmalarla tek harmonik simetrisine sahip hale getirilemez. Yani serisinde hem tek hem çift harmonikler bulunur.

$x_4(t) = x_C(t)$

Çünkü $x_4(t)$ tek veya çift değildir. Serisinde hem sin hem cos terimleri olmalıdır. Ortalaması sıfırdır. Tek harmonik simetrisine sahiptir. Yani hiç çift harmonik içermez.

$x_5(t) = x_D(t)$

Çünkü $x_5(t)$ tek veya çift olmamasına rağmen, ortalaması $a_0/2 = 1/2$ olup, bu kadar eksiltilirse tek bir sinyal haline gelir. Yani serisinde bu 0. terim dışında hiç cos terimi bulunmaz. Bu kaydırmayla tek harmonik simetrisine sahip hale gelmez. Yani serisinde hem tek hem çift harmonikler bulunur.

$x_6(t) = x_A(t)$

Çünkü $x_6(t)$ ne tek harmonik simetrisine sahiptir, ne tek ne de çift bir sinyaldir. Ne de düşey bir kaydırmayla bunlardan biri haline getirilebilir. O halde Fourier serisinde hem tek hem çift harmonikler hem sin hem cos terimleri bulunacaktır. Aynı şeyler $x_1(t)$ için de söylenebilir. Ancak onda $T_0 = \pi$ olduğundan $\omega_0 = 2$ iken, $x_6(t)$ için $T_0 = 2\pi$ olduğundan $\omega_0 = 1$ olmaktadır. Ayrıca dikkat edilirse bu sinyalin üzerine $\frac{1}{2}\sin t$ eklenirse hem çift bir sinyal elde edilir, hem de periyot yarıya düşer; yani frekans 2 katına çıkar. Bu yüzden sinyal, $-\frac{1}{2}\sin t$ terimi dışında tek numaralı hiçbir harmonik ve hiçbir sin terimi içermez.

Şimdi bu serileri elde etmek için katsayı formüllerini kullanınız.
Ayrıca bu sinyallerin karmaşık serilerini doğrudan elde etmeye çalışınız. Sonra da karmaşık ve gerçel seriler arasında geçiş yaparak sonuçların tutarlılığını görünüz.