DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEZ SİSTEMLERDE

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$a_N \neq 0$ olmak üzere, giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_M x^{(M)}(t) + b_{M-1} x^{(M-1)}(t) + \quad \ldots \quad + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t)$$

gibi N. mertebeden doğrusal bir diferansiyel denklemle veriliyorsa sistem N. mertebeden doğrusal bir sistemdir. Eğer a_0, a_1, … , a_N; b_0, b_1, … , b_M katsayılarının hepsi zamana göre sabitse, yani denklem sabit katsayılıysa sistem N. mertebeden doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemdir. Bu katsayıların birisi bile sadeleştirilemez bir şekilde zamana bağlıysa doğrusal zamanla değişen bir sistemdir. Ancak her doğrusal veya her DZD sistem böyle ifade edilemeyebilir.

Girişteki yüksek frekans gürültüsünün çıkışa artan bir oranda etki etmemesi için $M \leq N$ olması tercih edilir. Hatta M ne kadar küçükse çıkıştaki yüksek frekans gürültüsü oransal olarak o kadar küçük olur.

Verilen bir giriş sinyaline karşılık çıkış sinyalinin bulunabilmesi için N adet şarta ihtiyaç vardır. Genellikle bu şartlar t_0 gibi bir başlangıç anındaki $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, … , $y^{(N-1)}(t_0)$ değerleri ile verilir, ki bunlara "başlangıç şartları", böyle problemlere de "başlangıç değer problemi" denir.

Çözüm Adımları

Denklemin sağ tarafını

$$f(t) = b_M x^{(M)}(t) + b_{M-1} x^{(M-1)}(t) + \quad \ldots \quad + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t)$$

tanımlayarak çözüm adımlarını önce özetle, sonra bazılarını ayrıntılarıyla verelim:

1) $f(t)$ yerine sıfır, y yerine y_h yazılarak homojen çözüm(y_h) bulunur. Bu çözüm henüz belirlenmemiş N adet sabite bağlı olarak yazılır.

2) Denklemdeki $f(t)$ dikkate alınarak, hiçbir homojen çözüm bileşeni içermeyen özel çözüm($y_ö$) bulunur. Bu çözümdeki bütün sabitler bu aşamada belirlenir.

3) $y(t) = y_h(t) + y_ö(t)$ biçiminde toplam çözüm yazılır. Buradaki N adet sabit, başlangıç şartları kullanılarak belirlenir.

Eğer $f(t)$ parçalı tanımlıysa, her tanım aralığı için: 1. adımda y_h, sabitler için farklı semboller kullanılarak aynı biçimli olarak yazılır. 2. adımda $f(t)$ 'nin yalnızca değişen bileşenlerine karşılık gelen özel çözüm bileşenleri yeniden bulunur. Değişmeyen bileşenlere karşılık gelen özel çözüm bileşenleri aynı kalır. 3. adımın da tekrarlanması gerekir; ancak her aralık için ayrı ayrı başlangıç şartları verilmez. Verilen şartlar sadece geçerli olduğu zaman aralığında kullanılarak bulunan çözümden, komşu aralığın başlangıç (veya son) değerlerine geçiş yapılır ve bunlar o aralıkta kullanılır. $f(t)$ geçiş anında etkiyen bir darbe içermiyorsa geçiş anında $y(t)$, …, $y^{(N-1)}(t)$ sıçrama yapmaz.

1. Homojen çözüm

$$a_N y_h^{(N)}(t) + a_{N-1} y_h^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1 \dot{y}_h(t) + a_0 y_h(t) = 0$$

homojen denkleminin çözümünün, $e^{\lambda t}$ biçiminde bileşeni olduğunu varsayarak bu çözümü homojen denklemde yerine yazalım. Bu bileşenin her türevini alışta bir λ çarpanı geleceği için:

$$a_N \lambda^N e^{\lambda t} + a_{N-1} \lambda^{N-1} e^{\lambda t} + \quad \ldots \quad + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$ sadeleştirilirse:

$$\boxed{a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \quad \ldots \quad + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

Bu denkleme, diferansiyel denklemin ya da sistemin karakteristik denklemi denir. λ_1, λ_2, … , λ_N köklerinin her birine ise diferansiyel denklemin ya da sistemin özdeğeri (eigenvalue), ya da karakteristik kökü denir. Her bir özdeğer için bir homojen çözüm bileşeni bulunması mümkün olduğu için homojen çözümün genel ifadesi, <u>çakışık özdeğer yoksa</u> (tüm özdeğerler birbirinden farklıysa) şöyle olur:

$$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + A_N e^{\lambda_N t}$$

Eğer <u>çakışık özdeğer varsa</u>, meselâ λ_k, *m*-katlı bir özdeğer ($\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m-1}$) ise bunlara karşılık gelen homojen çözüm kısmı

$$A_k e^{\lambda_k t} + A_{k+1} t\, e^{\lambda_k t} + \ldots + A_{k+m-1} t^{m-1} e^{\lambda_k t} = \left(A_k + A_{k+1} t + \ldots + A_{k+m-1} t^{m-1}\right) e^{\lambda_k t}$$

olur. İstenirse bu bileşenlerdeki t ’lerin hepsinin yerine meselâ $(t-2)$ gibi kaymalı bir ifade de yazılabilir; bu sadece katsayıların farklı olmasını gerektirir, ki henüz belirlenmemiş katsayıların buna göre belirlenmesi sorun teşkil etmez. Böyle kaymalı ifadeler bazen hesap ve yorum kolaylığı sağlayabilir.

<u>*Örnek:*</u> $y_h^{(6)}(t) + 14 y_h^{(5)}(t) + 72 y_h^{(4)}(t) + 160 y_h^{(3)}(t) + 128 \ddot{y}_h(t) = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^6 + 14\lambda^5 + 72\lambda^4 + 160\lambda^3 + 128\lambda^2 = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -4$ bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} y_h(t) &= A_1 e^{0 \cdot t} + A_2 t\, e^{0 \cdot t} + A_3 e^{-2t} + A_4 e^{-4t} + A_5 t\, e^{-4t} + A_6 t^2 e^{-4t} \\ &= \left(A_1 + A_2 t\right) + A_3 e^{-2t} + \left(A_4 + A_5 t + A_6 t^2\right) e^{-4t} \end{aligned}$$

□

Not:

Eğer $\lambda_{k,k+1} = \sigma \mp j\omega$ gibi eşlenik çiftler halinde karmaşık özdeğerler varsa, bunlara karşılık gelen homojen çözüm bileşenleri, çakışık özdeğer değilseler

$$B e^{\sigma t} \sin \omega t + C e^{\sigma t} \cos \omega t$$

biçiminde de yazılabilir. Ayrıca bu özdeğerlerin çakışması da varsa yine bunun da t ’nin uygun kuvvetleriyle çarpılmış biçimleri de gelir.

Örnek: $y_h^{(3)}(t) + 3\ddot{y}_h(t) + 7\dot{y}_h(t) + 5y_h(t) = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -1 \mp j2$ bulunur. Çakışık kök olmadığı için: $y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t}\cos 2t + A_3 e^{-t}\sin 2t$ olur.

Örnek: $y_h^{(4)}(t) + 18\ddot{y}_h(t) + 81y_h(t) = 0$ homojen denkleminin çözüm ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$ karakteristik denkleminden özdeğerler $\lambda_1 = \lambda_2 = j3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -j3$ bulunur. Eşlenik köklerin her biri 2 katlı olduğu için:

$$y_h(t) = A_1\cos 3t + A_2\sin 3t + A_3 t\cos 3t + A_4 t\sin 3t = (a_1 + a_2 t)(b_1\cos 3t + b_2\sin 3t)$$

olur. Bu iki biçimden istenen kullanılabilir. □

2. Özel çözüm

Diferansiyel denklemin sağ tarafı $f(t)$ bileşenlerine ayrılır. Her bileşen için ayrı ayrı özel çözüm bileşenleri bulunur ve hepsinin toplamı özel çözüm olur. Özel çözüm, homojen çözüm tarafından kapsanan herhangi bir bileşen içermemelidir.

$r_1 e^{p_1 t}$ gibi bir bileşen için özel çözüm bileşeni:

$$p_1 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \quad \text{ise} \quad y_{ö1}(t) = c_1 e^{p_1 t}$$

$p_1 = \lambda_k$ gibi m-katlı bir özdeğere eşitse (bu özdeğer çakışık değilse $m = 1$'dir) $y_{ö1}(t) = c_1 t^m e^{\lambda_k t}$ olur. $f(t)$ içindeki sabit terimler için $p_1 = 0$ olduğu unutulmamalıdır.

Özel çözüm bileşenlerinin katsayıları, başlangıç şartları kullanılmadan belirlenmelidir. Bunun için, c_1 katsayısı, diferansiyel denklemde y yerine $y_{ö1}$ ve $f(t)$ yerine yalnızca ilgili bileşeni $r_1 e^{p_1 t}$ yazılarak bulunur. Bu yol,

$$p_1 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \quad \text{ise} \quad c_1 = \frac{r_1}{a_N p_1^N + a_{N-1} p_1^{N-1} + \ \ldots \ + a_1 p_1 + a_0}$$

biçiminde karakteristik denklemde λ yerine p_1 kullanılan kısa bir hale gelir. p_1'in bir özdeğere eşit olması durumunda bu kısa yol geçersizdir.

Tüm bileşenler için özel çözüm bileşenleri bulunduktan sonra bunların toplamı alınarak özel çözüm bulunur:

$$y_ö(t) = y_{ö1}(t) + y_{ö2}(t) + \ldots$$

Özel çözüm bileşenlerinde de istenirse t yerine meselâ $(t-5)$ gibi kaymalı bir ifade de yazılabilir; bu sadece katsayıların farklı olmasını gerektirir, ki henüz belirlenmemiş katsayıların buna göre belirlenmesi sorun teşkil etmez. Böyle kaymalı ifadeler bazen hesap ve yorum kolaylığı sağlayabilir.

Örnek: $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=x(t)$ sisteminin çıkışını, $x(t)=4e^{-t}u(t)$ girişi ve $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2+5\lambda+6=0$ → $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. $t<0$ için $x(t)=0$ olduğundan,

$t<0 \quad \Rightarrow \quad y(t)=y_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$. Denklemin sağ tarafında darbe olmadığı için

$y(0^-)=y(0)=0=A_1+A_2$. Türev ise $\dot{y}(t)=-2A_1e^{-2t}-3A_2e^{-3t}$ olduğundan,

$\dot{y}(0^-)=\dot{y}(0)=0=-2A_1-3A_2$ → Buradan $A_1=A_2=0$ yani $y(t)=0$ bulunur.

$t\geq 0$ için homojen çözüm farklı katsayılarla aynı biçimli olur: $y_h(t)=B_1e^{-2t}+B_2e^{-3t}$.

$t\geq 0$ için $f(t)=x(t)=4e^{-t}$ ve $-1\notin\{-2,-3\}$ olduğundan $y_ö(t)=ce^{-t}$. Burada $c=\dfrac{4}{(-1)^2+5\cdot(-1)+6}=2$ bulunur. Dolayısıyla $y_ö(t)=2e^{-t}$ ve

$y(t)=B_1e^{-2t}+B_2e^{-3t}+2e^{-t}$.

$y(0)=0=B_1+B_2+2$. Türev ise $\dot{y}(t)=-2B_1e^{-2t}-3B_2e^{-3t}-2e^{-t}$ olduğundan,

$\dot{y}(0)=0=-2B_1-3B_2-2$ → $B_1=-4$, $B_2=2$.

Sonuçta tüm zamanların çözümü:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0 \text{ ise}\\ -4e^{-2t}+2e^{-3t}+2e^{-t} & t\geq 0 \text{ ise}\end{cases} \qquad \text{ya da kısaca} \quad y(t)=\left(-4e^{-2t}+2e^{-3t}+2e^{-t}\right)u(t)\ .$$

Not:
Eğer $t<t_0$ için $f(t)=0$ ise yani $f(t)=(\ldots)u(t-t_0)$ biçiminde yazılabiliyor ve $t=t_0$'daki $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, … , $y^{(N-1)}(t_0)$) başlangıç değerlerinin hepsi sıfır ise $t<t_0$ için $y(t)=0$ olacağı zaten bellidir. Bu yüzden böyle bir durumda yalnız $t\geq t_0$ için $u(t-t_0)=1$ koyarak bulunan çözümü $u(t-t_0)$ ile çarparak tüm zamanların çözümü elde edilir.

Örnek: $\ddot{y}(t)+y(t)=x(t)$ sisteminin çıkışını(*y*), $x(t)=4e^{-(t-2)}u(t-2)+5u(t-2)$ girişi ve $y(2)=0$, $\dot{y}(2)=0$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2+1=0$ → $\lambda_{1,2}=\mp j$. $t\geq 2$ için homojen çözüm: $y_h(t)=A\cos(t-2)+B\sin(t-2)$.

$t\geq 2$ için denklemin sağ tarafı $x(t)=4e^{-(t-2)}+5$ olup üstel bileşenlerin üs katsayılarından hem $-1\notin\{\lambda_1,\lambda_2\}$ hem de $0\notin\{\lambda_1,\lambda_2\}$ olduğu için özel çözüm bileşenleri:

$4e^{-(t-2)}$ için $y_{ö1}(t)=c_1e^{-(t-2)}$ olup $c_1=\dfrac{4}{(-1)^2+1}=2$ ve

$5 = 5e^{0\cdot(t-2)}$ için $y_{ö2} = c_2 e^{0\cdot(t-2)} = c_2$ olup $c_2 = \dfrac{5}{0^2+1} = 5$ bulunur. Yani $y_ö(t) = 2e^{-(t-2)} + 5$.

$t \geq 2$ için toplam çözüm: $y(t) = A\cos(t-2) + B\sin(t-2) + 2e^{-(t-2)} + 5$. Başlangıç değerleri ile: $y(2) = A + 2 + 5 = 0$

$\dot{y}(2) = B - 2 = 0$ → $A = -7$, $B = 2$.

Son nottaki şartlardan sağlandığı için tüm zamanlar için çözüm:

$$y(t) = \left(-7\cos(t-2) + 2\sin(t-2) + 2e^{-(t-2)} + 5\right)u(t-2) \ .$$

Görüldüğü gibi bazen çözümü $(t-2)$'ye göre yazmak, hem katsayıların kolay bulunmasını, hem de sonucun daha iyi yorumlanmasını sağlamaktadır.

<u>*Örnek:*</u> $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3x(t)$ sisteminin çıkışını, $x(t) = 2u(t) - e^{-2(t-3)}u(t-3)$ girişi ve $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ başlangıç şartları için bulunuz.

Çözüm: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ → $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. $t < 0$ için $x(t) = 0$ olduğundan,

$t < 0 \Rightarrow y(t) = y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$. Denklemin sağ tarafında darbe olmadığı için

$y(0^-) = y(0) = 0 = A_1 + A_2$. Türev ise $\dot{y}(t) = -A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-2t}$ olduğundan,

$\dot{y}(0^-) = \dot{y}(0) = 1 = -A_1 - 2A_2$ → Buradan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ bulunur.

Yani $t < 0 \Rightarrow y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

$0 \leq t < 3 \Rightarrow y_h(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-2t}$. Sağ tarafta ise $f(t) = 3 \times 2 = 6 = 6e^{0\cdot t}$ bulunduğu için

$y_{ö1}(t) = c_1$ (çünkü $0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$) → $\dot{y}_{ö1} = 0$, $\ddot{y}_{ö1} = 0$. Bunlar diferansiyel denklemde yalnız ilgili bileşen için yerine konursa:

$0 + 3\times 0 + 2c_1 = 6$ → $c_1 = 3 = y_{ö1}(t)$. Toplam çözüm ise $y(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-2t} + 3$. Türevi ise $\dot{y}(t) = -B_1 e^{-t} - 2B_2 e^{-2t}$. Başlangıç şartlarından:

$y(0) = 0 = B_1 + B_2 + 3$

$\dot{y}(0) = 1 = -B_1 - 2B_2$ → $B_1 = -5$, $B_2 = 2$.

$t \geq 3 \Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-(t-3)} + K_2 e^{-2(t-3)}$. Sağ taraftaki 6 terimi değişmediği için $y_{ö1} = 3$ de aynıdır.

$-3e^{-2(t-3)}$ için ise $p_1 = -2 = \lambda_2$ tek katlı özdeğerine eşit olduğu için özel çözüm bileşeni: $y_{ö2}(t) = c_2(t-3)e^{-2(t-3)}$ olur. Türevleri ise: $\dot{y}_{ö2}(t) = c_2 e^{-2(t-3)} - 2c_2(t-3)e^{-2(t-3)}$ ve $\ddot{y}_{ö2}(t) = -4c_2 e^{-2(t-3)} + \ldots$. Sadece $(t-3)$ çarpanı içermeyen kısımlar c_2 katsayısını bulmamıza yaradığı için, son türevde ve diferansiyel denklemde yerine yazarken $(t-3)$

çarpanı içeren kısımları "…" diyerek geçiştirebiliyoruz. Bunları diferansiyel denklemde sadece ilgili bileşen için yerine yazarsak:

$\ddot{y}_{ö2}(t) + 3\dot{y}_{ö2}(t) + 2y_{ö2}(t) = \left(-4c_2 + 3c_2\right)e^{-2(t-3)} + \ldots = -3e^{-2(t-3)}$. Buradan $c_2 = 3$

$\rightarrow \quad y_{ö2}(t) = 3(t-3)e^{-2(t-3)} \quad \rightarrow \quad y(t) = y_h(t) + y_{ö1}(t) + y_{ö2}(t)$, yani:

$y(t) = K_1 e^{-(t-3)} + K_2 e^{-2(t-3)} + 3 + 3(t-3)e^{-2(t-3)}$ bulunur.

K_1 ve K_2 sabitlerini bulmak için bu zaman bölgesinde iki şarta ihtiyaç vardır. Diferansiyel denklemin sağ tarafında geçiş ($t = 3$) anında etkiyen bir darbe olmadığı için bir önceki zaman aralığı çözümünün son değerlerini bu bölgenin başlangıç şartları olarak kullanabiliriz:

$y(3^-) = y(3) = -5e^{-3} + 2e^{-6} + 3 = K_1 + K_2 + 3$

$\dot{y}(3^-) = \dot{y}(3) = 5e^{-3} - 4e^{-6} = -K_1 - 2K_2 + 3 \quad \rightarrow \quad K_2 = 2e^{-6} + 3$ ve $K_1 = -5e^{-3} - 3$.

Genel çözümü yazarsak:

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t} & t < 0 \\ -5e^{-t} + 2e^{-2t} + 3 & 0 \le t < 3 \\ (-3 - 5e^{-3})e^{-(t-3)} + (3 + 2e^{-6})e^{-2(t-3)} + 3 + 3(t-3)e^{-2(t-3)} & t \ge 3 \end{cases}$$

Not:

$f(t)$ trigonometrik veya üstel çarpanlı trigonometrik bir bileşen içeriyorsa bunun üstel sinyaller biçimindeki ifadesinin üs katsayıları $p_{1,2} = \alpha \mp j\beta$ gibi eşlenik çiftlere karşılık gelir. Dolayısıyla $f(t)$ içindeki $r_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + r_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$ bileşenine karşılık, bu ikisinden yalnız birisi olsa bile, $\alpha \mp j\beta \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ ise özel çözüm bileşeni olarak

$$c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$$

yazılır. Eğer $\alpha \mp j\beta$, m-katlı bir özdeğer çiftine eşitse, yukarıdaki ifadenin t^m ile çarpılmışı yazılır. $\alpha = 0$ için bu, *zorlanmış rezonans* olduğu anlamına gelir.

Örnek: $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$ sisteminin çıkışını, $x(t) = 6 + 4e^{-3t}\cos 2t$ girişi ve $y(0) = 2$ başlangıç şartı için hesaplayınız.

Çözüm: $\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -3 \rightarrow y_h(t) = Ae^{-3t}$.

6 bileşeni için, $0 \ne \lambda$ olduğundan, $y_{ö1} = c_1 \rightarrow c_1 = \dfrac{6}{0+3} = 2 = y_{ö1}(t)$.

$4e^{-3t}\cos 2t$ için, $-3 \mp j2 \ne \lambda$ olduğundan, $y_{ö2} = c_2 e^{-3t}\cos 2t + c_3 e^{-3t}\sin 2t$. Bu bileşen için diferansiyel denklem

$\dot{y}_{ö2}(t)+3y_{ö2}(t)=(-3c_2+2c_3+3c_2)e^{-3t}\cos 2t+(-2c_2-3c_3+3c_3)e^{-3t}\sin 2t=4e^{-3t}\cos 2t$

kullanılarak $2c_3=4$ ve $-2c_2=0$ → $c_2=0$, $c_3=2$ bulunur.

Genel çözüm: $y(t)=Ae^{-3t}+2+2e^{-3t}\sin 2t$.

$y(0)=2=A+2$ → $A=0$ → $y(t)=2+2e^{-3t}\sin 2t$.

Örnek (Zorlanmış rezonans):

$\ddot{y}(t)+4y(t)=5x(t)$ sisteminin çıkışını, $x(t)=u(t)\sin 2t$ girişi ve $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$ başlangıç şartları için hesaplayınız.

Çözüm: $\lambda^2+4=0$ → $\lambda_{1,2}=\mp j2$.

$t\geq 0$ için $y_h(t)=A\cos 2t+B\sin 2t$.

Sağdaki $5\sin 2t$ için, $\mp j2=\lambda_{1,2}$ tek katlı eşlenik özdeğer çiftine eşit olduğundan

$y_ö(t)=c_1 t\cos 2t+c_2 t\sin 2t$ özel çözümü yazılır. Bu ve 2. türevi diferansiyel denklemde yazılır:

$\dot{y}_ö(t)=c_1\cos 2t-2c_1 t\sin 2t+c_2\sin 2t+2c_2 t\cos 2t$

$\ddot{y}_ö(t)=(2c_2+2c_2)\cos 2t+(-2c_1-2c_1)\sin 2t+t\cdot(\ldots)$

$\ddot{y}_ö(t)+4y_ö(t)=4c_2\cos 2t-4c_1\sin 2t+t\cdot(\ldots)=5\sin 2t$

(Son türevde ve özel çözümün yerine yazıldığı diferansiyel denklemde t çarpanlı kısmın katsayı bulunmasına faydası olmadığı için … diyerek geçilmiştir.)

$4c_2=0$ ve $-4c_1=5$ → $c_1=-5/4$ ve $c_2=0$ bulunur. Toplam çözüm ise:

$y(t)=A\cos 2t+B\sin 2t-\frac{5}{4}t\cos 2t$. Başlangıç şartlarından:

$y(0)=0=A$

$\dot{y}(0)=0=2B-\frac{5}{4}$ → $A=0$, $B=\frac{5}{8}$ bulunur.

Sağ taraf $u(t)$ ile çarpılmış ve $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$ olduğu için tüm zamanlar için:

$$\boxed{y(t)=\left(\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{5}{4}t\cos 2t\right)u(t)}$$

bulunur.

Buradaki t çarpanlı bileşen, salınım genliğinin gittikçe artmasına neden olarak pratikte sistemin modelinin geçerli olduğu sınırları zorlayarak bozulmaya neden olur. Köprü ve cam eşyalarda yıkıma neden olduğu söylenen rezonans, normal rezonans değil, bu örnekteki gibi zorlanmış rezonanstır. Salıncak, sarkaç gibi aslında doğrusal olmayıp, küçük salınım sınırlarında yaklaşık doğrusal olan sistemlerde de salınım genliğinin bir yere kadar kolayca artırılabilmesi için sallama kuvvetinin, sistemin doğal salınım frekansında olması gerekir. Meselâ salıncağı bir taraftan itekledikten doğal salınım periyodu kadar sonra salıncak aynı tarafa gelecek, o anda tekrar iteklenince salınım genliği kolayca artacaktır. İki taraftan iteklenen salıncakta da bir taraftan uygulanan kuvvet artı, diğer taraftan uygulanan kuvvet eksi olduğu için kuvvetin periyodu yine aynıdır. Ancak sistemi doğrusal varsayılabilecek sınırların dışına çıkartan salınım genliklerine ulaşınca bu genlik sınırlı hale gelecektir. Salıncağı, doğal salınım frekansından başka bir frekansta kuvvetle sallamak denenirse, genlik artışının ne kadar zor olduğu görülür.

Diferansiyel Denklemin Sağ Tarafında Darbe Varsa Çözüm

$$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \quad \dots \quad + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = f(t) = g(t) + r\delta(t - t_0)$$

biçiminde olsun. Burada $a_N \neq 0$ ve $g(t)$, t_0 anında etkiyen bir darbe içermeyen sonlu bir fonksiyon olsun. r'nin ise sabit ya da t'ye bağlı olması hiç fark etmez; çünkü t'ye bağlı olsa da yalnızca t_0'daki değeri kullanılır.

Böyle bir durumda $t < t_0$ ve $t > t_0$ bölgeleri için ayrı ayrı çözüm yapılır ve tabii bu bölgelerde $\delta(t - t_0) = 0$ olduğundan bu darbe dikkate alınmaz. Ancak homojen çözümden gelen katsayıları bulmak için kullanılması gereken, $t < t_0$ bölgesine ait $y(t_0^-)$, $\dot{y}(t_0^-)$, … , $y^{(N-1)}(t_0^-)$ son değerler ile $t > t_0$ bölgesine ait $y(t_0^+)$, $\dot{y}(t_0^+)$, … , $y^{(N-1)}(t_0^+)$ başlangıç değerleri arasındaki geçiş şöyle yapılır:

$$y^{(N-1)}(t_0^+) = y^{(N-1)}(t_0^-) + \frac{r}{a_N}$$

$$\left.\begin{aligned} y^{(N-2)}(t_0^+) &= y^{(N-2)}(t_0^-) \\ &\vdots \\ y(t_0^+) &= y(t_0^-) \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ Bu kısım } N \geq 2 \text{ için uygulanır.}$$

$N = 1$ ise yalnızca en üstteki, yani $y(t_0^+) = y(t_0^-) + \dfrac{r}{a_N}$ uygulanır.

İspat: Diferansiyel denklemin $\left[t_0^-, t_0^+\right]$ aralığında integralini alalım:

$$a_N \int_{t_0^-}^{t_0^+} y^{(N)}(t)dt + a_{N-1} \int_{t_0^-}^{t_0^+} y^{(N-1)}(t)dt + \quad \dots \quad + a_1 \int_{t_0^-}^{t_0^+} \dot{y}(t)dt + a_0 \int_{t_0^-}^{t_0^+} y(t)dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} g(t)dt + r \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)dt$$

Sol tarafta ilki hariç tüm integraller, sağ taraftaki ilk integral, sonlu büyüklüklerin sonsuz küçük zaman aralığında integralleri olduğu için sıfırdır. Bu zaman aralığında yalnızca sağdaki darbe ve onun doğrudan etkilediği $y^{(N)}(t)$ sonsuz olup bunların integralleri eşitlenerek:

$$a_N\left[y^{(N-1)}(t)\right]_{t_0^-}^{t_0^+}= a_N\left[y^{(N-1)}(t_0^+) - y^{(N-1)}(t_0^-)\right]= r \qquad \rightarrow \qquad y^{(N-1)}(t_0^+) = y^{(N-1)}(t_0^-) + \frac{r}{a_N}$$

bulunur. Varsa ($N \geq 2$ ise) daha düşük mertebeli türevlerde ise sıçrama olmaz. Sağ tarafta darbenin de türevleri olsaydı daha düşük mertebeli türevlerde de sıçrama yaptırabilirdi; ancak bu konuyu burada ele almayacağız. Sıradaki konu bu konunun uygulaması niteliğindedir.

Sistemin Diferansiyel Denkleminden Birim Darbe Tepkisinin Bulunması

Normalde x yerine δ, ve y yerine h yazarak diferansiyel denklemi çözüp birim darbe tepkisini bulabiliriz. Ancak az önceki konuda anlatılan kuralı, $a_N \neq 0$ olmak üzere, giriş(x) – çıkış(y) ilişkisi

$$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

ile verilen nedensel bir sisteme uygularsak birim darbe tepkisini bulma yöntemi oldukça basitleşir. Çünkü nedensel DZD sistemlerde

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

olduğu için $t < 0$ bölgesinde $h(t)$ 'nin bütün türevleri de sıfır olacaktır. Böylece $t > 0$ bölgesine ait başlangıç şartları (0^+ anı için) kolayca belirlenebilecektir. Sonsuz küçük zaman farkını göz ardı ederek başlangıç anını 0^+ yerine 0 alırsak yöntem şu şekilde özetlenebilir:

y yerine h, sağ tarafa da sıfır yazarak $t > 0$ bölgesi için

$$a_N h^{(N)}(t) + a_{N-1}h^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1\dot{h}(t) + a_0 h(t) = 0$$

diferansiyel denklemi şu başlangıç şartları için çözülür:

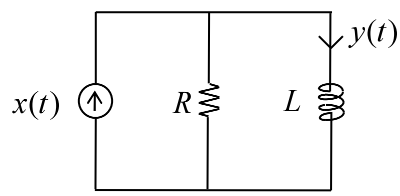
$$h^{(N-1)}(0) = \frac{b_0}{a_N}$$

$$\left.\begin{array}{r} h^{(N-2)}(0) = 0 \\ \vdots \\ h(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Bu kısım } N \geq 2 \text{ için uygulanır.}$$

$N = 1$ ise yalnızca en üstteki, yani $h(0) = \dfrac{b_0}{a_N}$ uygulanır. Bulunan çözüm $u(t)$ ile çarpılarak birim darbe tepkisinin tüm zamanlar için ifadesi elde edilir. Denklem ve dolayısıyla çözümü homojendir.

Örnek:

Şekildeki devrenin birim darbe tepkisini bulunuz.



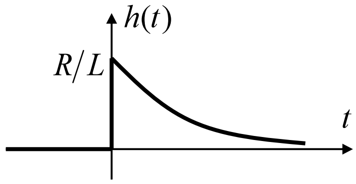
<u>Çözüm:</u>

$\frac{L}{R}\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ olduğuna göre

$t > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R}\dot{h}(t) + h(t) = 0$ denklemini $h(0) = \frac{1}{L/R} = \frac{R}{L}$ başlangıç şartı için çözmeliyiz.

$$\frac{L}{R}\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -R/L \quad \rightarrow \quad h(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad \rightarrow \quad h(0) = A = \frac{R}{L}$$

Tüm zamanlar için ifadesi ise: $h(t) = \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$.



Örnek:

$\dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 6y(t) = 2x(t)$ ile tanımlı nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $t > 0 \quad \Rightarrow \quad \dddot{h}(t) + 6\ddot{h}(t) + 11\dot{h}(t) + 6h(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3 \quad \rightarrow \quad h(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} + A_3e^{-3t}$$

$$h(0) = 0 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\dot{h}(0) = 0 = -A_1 - 2A_2 - 3A_3$$

$$\ddot{h}(0) = 2/1 = 2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 \quad \rightarrow \quad A_1 = 1, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = 1$$

Sonuç: $h(t) = \left(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}\right)u(t)$.

Not:

Bazen diferansiyel denklemin yalnız sağ tarafı

$$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = bx(t - t_0)$$

gibi zamanda ötelenmiş biçimli olabilir. Bu durumda daha önce anlatılan başlangıç şartları 0 yerine t_0 anı için yazılır ve katsayılar bulunduktan sonra $h(t)$ ifadesi $u(t)$ yerine $u(t\text{-}t_0)$ ile çarpılarak tüm zamanlar için geçerli ifade yazılır. Bu çözümü $(t\text{-}t_0)$ 'a göre düzenlemek, hem katsayıların kolay bulunmasını, hem de çizim ve yorum kolaylığı sağlar. Yani $t > t_0$ bölgesi için

$$a_N h^{(N)}(t) + a_{N-1}h^{(N-1)}(t) + \quad \ldots \quad + a_1\dot{h}(t) + a_0 h(t) = 0$$

diferansiyel denklemi şu başlangıç şartları için çözülür:

$$h^{(N-1)}(t_0) = \frac{b}{a_N}$$

$$\left.\begin{array}{c} h^{(N-2)}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ h(t_0) = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \text{ Bu kısım } N \geq 2 \text{ için uygulanır.}$$

Sonra da bu çözüm $u(t\text{-}t_0)$ ile çarpılarak tüm zamanlar için geçerli ifade elde edilir.

Örnek:

$2\ddot{y}(t) + 50y(t) = 4x(t-3)$ ile verilen nedensel sistemin birim darbe tepkisini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $t > 3 \;\Rightarrow\; 2\ddot{h}(t) + 50h(t) = 0 \;\rightarrow\; 2\lambda^2 + 50 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_{1,2} = \mp j5$

$\rightarrow\; h(t) = A\cos 5(t-3) + B\sin 5(t-3)$

$h(3) = 0 = A$

$\dot{h}(3) = 4/2 = 2 = 5B \;\rightarrow\; A = 0\,,\quad B = 2/5$.

Sonuç: $h(t) = \dfrac{2}{5}\sin\left[5(t-3)\right]\cdot u(t-3)$.