Doğrusal Zamanla Değişmez (DZD) Sistemlerde Özellikler

DZD bir sistemin birim darbe tepkisi h biliniyorsa herhangi bir x girişi için çıkış y hesaplanabildiğine göre, h sistemin bütün özelliklerini içermektedir. Öyleyse yalnız h 'a bakarak DZD sistemin hangi özelliklere sahip olduğunu söyleyebiliriz. "Doğrusallık" ve "zamanla değişmezlik" özelliklerini zaten varsaydığımıza göre diğer özelliklere bakacağız. Ancak önce çok kullanışlı bir ispat yöntemini görelim.

Çelişki (Tezat = *Contradiction*) Yöntemiyle İspat

Örnek soru: "Parmak izi varsa o suçludur" önermesinin mantık eşdeğeri (biri doğruysa diğeri de doğru, biri yanlışsa diğeri de yanlış olan diğer bir ifadesi) aşağıdakilerden hangisidir?

a) Parmak izi yoksa o suçsuzdur.

b) O suçsuzsa parmak izi yoktur.

c) O suçluysa parmak izi vardır.

Doğru cevap boşluklar sayılmadan bu cümlenin otuzuncu harfidir.

Mantıkta bu eşdeğerlik şöyle formülleştirilmiştir:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$$

Doğruluk tablolarını çıkartırsanız birebir aynı olduğunu görebilirsiniz. Diğer bir örnek de

"Yağmur yağıyorsa hava bulutludur" ≡ "Hava bulutlu değilse yağmur yağmıyordur"

Dikkat ediniz bu önermelerin doğru olup olmadığını tartışmıyoruz; biri doğruysa diğerinin de doğru, biri yanlışsa diğerinin de yanlış olduğundan bahsediyoruz.

1. Belleklilik

$$\begin{matrix} h(t) = A\delta(t) \\ h[n] = A\delta[n] \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{Sistem\ belleksiz}$$

Yani h sol taraftaki gibi yazılabiliyorsa sistem belleksizdir, belleksizse sol taraftaki gibi yazılabilir (yazılamıyorsa belleklidir).

İspat: Yalnız ayrık zamanlı için ispatlayalım; sürekli zamanlı için de çok benzeri olacaktır.

⇒ yönü ispat: $y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\delta[k]x[n-k] = Ax[n] = y[n]$

(Yalnız $\delta[0] = 1$, diğer k anlarında $\delta[k] = 0$ olduğu için sadece $k = 0$ değerine eşit oldu.)

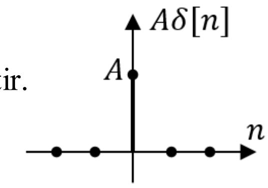
Yukarıda en sağdaki eşitlikten açıkça belleksiz olduğu görülmektedir. ⇒ yön ispat tamamlanmıştır.

⇐ yönü ispat: Çelişki yöntemini kullanalım. Yani "sistem belleksiz ise $h[n] = A\delta[n]$" yerine,

"$h[n] \neq A\delta[n]$ ise sistem belleklidir" önermesini ispatlayalım.

Eğer $h[n] = A\delta[n]$ diye yazamıyorsak en az bir $m \neq 0$ anı için $h[m] \neq 0$ demektir.

Bu durumda



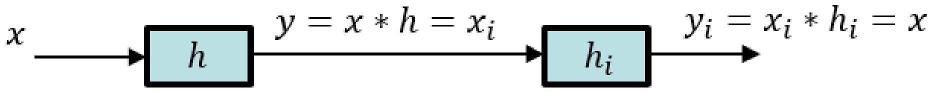
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \cdots + h[m]x[n-m] + \cdots$$

olur ki burada $x[n-m]$'ye bağımlılıktan dolayı sistem bellekli demektir. ⇐ yön ispat da tamamlanmıştır.

Not: Belleksiz DZD sistemlerde giriş çıkış ilişkisi süreklide $y(t) = Ax(t)$, ayrıkta $y[n] = Ax[n]$ biçiminde yazılabilir. Yani belleksiz DZD sistemler basit yükselticidir (kazancı birden küçük, eşit veya negatif de olabilir).

2. Tersine Çevrilebilirlik

Birim darbe tepkisi h olan sistem tersine çevrilebilir ise tersi sistemin birim darbe tepkisine h_i diyelim. Bu iki sistemi şekildeki gibi peş peşe bağladığımızda son çıkışın ilk girişe eşit olması gerekir.



$$(x * h) * h_i = x * (h * h_i) = x$$

Yani $(h * h_i)$, konvolüsyon işleminin etkisiz elemanı olmalıdır.

Bir sinyalin bir darbeyle konvolüsyonu

$$x[n] * \delta[n-a] = x[n-a] \qquad \text{ya da} \qquad x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

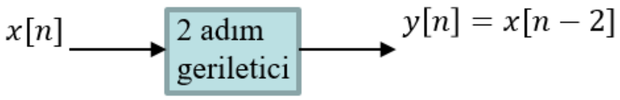
özelliğini $a = 0$ için kullanırsak görürüz ki konvolüsyon işleminin etkisiz elemanı birim darbedir, ayrık zamanlı için $\delta[n]$, sürekli zamanlı için $\delta(t)$.

Sonuç olarak, birim darbe tepkisi h olan bir sistem,

$$h * h_i = \delta$$

şartını sağlayan bir h_i mevcutsa tersine çevrilebilir, ve tersi sistemin birim darbe tepkisi h_i 'dir. Ancak verilen bir h için bir h_i mevcut olup olmadığını ve varsa onu bulmanın yolunu gösteren genel bir yöntem bilinmemektedir. Ancak tecrübelerimize göre tahmin ettiğimiz bir h_i için sağlama olarak bu formülü kullanabilmekteyiz.

Örnek:



Sisteminin girişine $\delta[n]$ uygulanarak birim darbe tepkisi, $h[n] = \delta[n-2]$ bulunur. Bu sistemin tersinin "2 adım ilerletici" olduğunu tahmin ederek sağlamasına bakalım. 2 adım ilerleticinin girişine $\delta[n]$ uygulanarak birim darbe tepkisi, $h_i[n] = \delta[n+2]$ bulunur.

$$h[n] * h_i[n] = h[n] * \delta[n+2] = h[n+2] = \delta[n-2+2] = \delta[n]$$

bularak tahminimizi doğrulamış oluruz.

Örnek:

$y(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ integral alıcı sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$ bulunur.

Bunun tersi sistemin türev alıcı $y_i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$ olduğunu tahmin ederek sağlamasına bakalım. Türev alıcının

birim darbe tepkisi $h_i(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$ bulunur.

$$h_i(t) * h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} * u(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)d\big(\delta(\tau)\big) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} d\big(\delta(\tau)\big)$$

$$= \delta(\tau)\Big|_{-\infty}^{t} = \delta(t) - \delta(-\infty) = \delta(t)$$

bularak tahminimizi doğrulamış oluruz.

3. Nedensellik

$$\left.\begin{array}{l}\forall t<0 \ \text{ için } \ h(t)=0 \\ \forall n<0 \ \text{ için } \ h[n]=0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad Sistem\ nedensel$$

İspat: Yalnız ayrık zamanlı için ispatlayalım; sürekli zamanlı için de çok benzeri olacaktır.

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

İddianın sol tarafını varsayarsak buradan $y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]$ yani çıkış ifadesinde gelecekteki bir giriş değerine ($x[n+1]$ gibi) bağımlılık olmadığı görülür. İddianın sağ tarafını varsaysak da çıkışın gelecekteki bir giriş değerine bağımlı olmadığı anlamına geldiğinden yine son çıkış ifadesine ulaşırız. Böylece her iki yön için de iddianın doğruluğu görülür.

Örnek: Taksitli alışveriş sistemi temel tanımları,

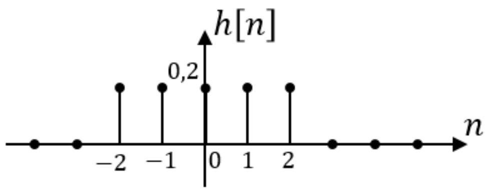
n : Ay numarası

$x[n]$: Giriş n. ayda teslim alınanların etiket fiyatları üzerinden tutarı

$y]n]$: Çıkış ödeme planı, yani n. ay taksidi

Bir mağaza teslimattan 2 ay önce başlayan faizsiz/vade farksız 5 eşit taksitle satış yapıyor. Bu sistemin birim darbe tepkisini bulup, nedenselliğini inceleyelim.

Birim darbe tepkisi, giriş $\delta[n]$ iken çıkış demektir. Girişin $\delta[n]$ olması ise 0. ayda etiket fiyatı üzerinden 1 birimlik alımın teslimatının yapılmasıdır. Çıkış sinyali ise teslimattan 2 ay önce başlayan faizsiz/vade farksız 5 eşit taksitli ödeme planı olduğuna göre $\delta[n]$ girişi için çıkış



yandaki şekildeki gibi bulunur. Burada bazı $n<0$ için $h[n]\neq 0$ olduğu için bu sistem nedensel değildir. (*Nedensel olmayan bir sistem nasıl bu kadar kolay gerçekleştirilebiliyor diye sorarsanız, buradaki nedensel olmama durumunun, "planların gerçekleşeceği varsayımına dayalı" olmasındandır. Gerçekte taksit ödemeleri başladıktan sonra teslimat aksayabilir, o varsayım çökebilir.*)

4. Kararlılık

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt<\infty \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|<\infty\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad Sistem\ kararlı$$

İspat: Yalnız ayrık zamanlı için ispatlayalım; sürekli zamanlı için de çok benzeri olacaktır.

$\Rightarrow$ yönü ispat: Sol taraf varsayılarak her sınırlı giriş ($|x[n]|\leq A<\infty \quad \forall n$) için çıkışın sınırlı ($|y[n]|<\infty \quad \forall n$) olduğu gösterilecek.

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

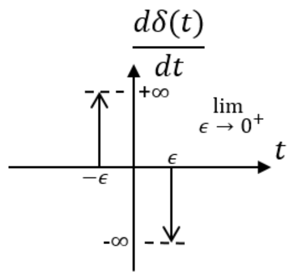
$$|y[n]|\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\underbrace{|x[n-k]|}_{\leq A<\infty} \leq A \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|}_{<\infty \text{ varsayılmıştı}} <\infty \ \checkmark$$

$\Leftarrow$ yönü ispat: Çelişki yöntemini kullanalım. Yani "sistem kararlı ise iddianın solundaki toplamın sonlu olduğu" yerine, "$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|=\infty$ ise sistemin kararsız olduğu" gösterilecek. Yani öyle sınırlı bir giriş bulunacak ki soldaki o toplam sonsuz ise çıkışın sonsuza gittiği bir an olduğu gösterilecek. Bu sınırlı girişi şöyle seçelim:

$x[n] = \begin{cases} 1 & h[3-n] \geq 0 \;\; ise \\ -1 & h[3-n] < 0 \;\; ise \end{cases}$ Burada *n* yerine $3 - k$ yazarsak: $x[3-k] = \begin{cases} 1 & h[k] \geq 0 \;\; ise \\ -1 & h[k] < 0 \;\; ise \end{cases}$

$y[3] = \big[h[n] * x[n]\big]_{n=3} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[3-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$ ✓

Örnek: Türev alıcı sistemin kararlılığını inceleyelim. Birim darbe tepkisi $h(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$. Limit yaklaşımıyla bakıldığında $\delta(t)$, sıfır anı komşuluğunda bir an için sonsuza çıkıp bir an sonra geri sıfıra inen bir şekle sahiptir. Bunun türevi ise sıfır anı komşuluğunda bir an için artı sonsuz (hem de sonsuz kere sonsuz), bir an sonra eksi sonsuz, sonra geri sıfıra gelen bir şekle sahiptir. Artı sonsuza ve eksi sonsuza giden kısımların mutlak değer integraline katkısı aynıdır. Bu yüzden bu integralin başlangıç anını $t = 0$'da artı sonsuza ve eksi sonsuza giden kısımların ortasından itibaren alıp 2 ile çarpabiliriz. Ayrıca sağdaki eksi sonsuza gittiği için, mutlak değeri için zıt işaretli yazılmalıdır.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d\delta(t)}{dt}\right| dt = 2\int_{0}^{+\infty} \left|\frac{d\delta(t)}{dt}\right| dt = -2\int_{0}^{+\infty} \frac{d\delta(t)}{dt} dt = -2\int_{0}^{+\infty} d\big(\delta(t)\big) = -2[\delta(t)]_0^{+\infty}$$

$$= -2[\underbrace{\delta(+\infty)}_{\mathbf{0}} - \underbrace{\delta(0)}_{+\infty}] = +\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt$$

olduğundan türev alıcı sistem kararsızdır.

Örnek:

$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ integral alıcı sistemin birim darbe tepkisi $h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$ bulunur.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} 1 \cdot dt = +\infty$$

olduğundan integral alıcı sistem kararsızdır.

Örnek: Birim darbe tepkisi $h[n] = \alpha^n u[n]$ olan sistem kararlı mıdır?

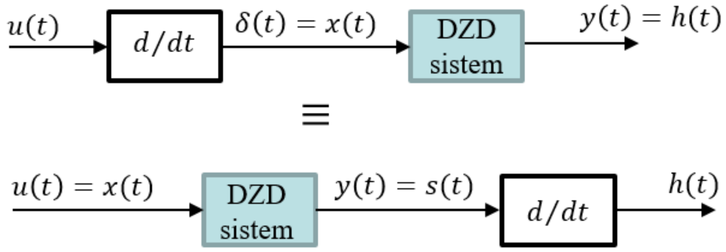
Çözüm:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - |\alpha|^{n+1}}{1 - |\alpha|} = \begin{cases} +\infty & |\alpha| > 1 \;\text{ ise} \\ \dfrac{1}{1 - |\alpha|} & 0 < |\alpha| < 1 \;\text{ ise} \end{cases}$$

Yani sistem, $|\alpha| > 1$ ise kararsız, $0 < |\alpha| < 1$ ise kararlıdır. $\alpha = 0$ durumunun tanımsız, $|\alpha| = 1$ durumunun ise belirsiz olduğunu hatırlayınız.

Birim Basamak Tepkisi (s)

Özellikle sürekli zaman sistemlerinde ideale yakın birim darbe sinyali elde etmek güç olduğu için birim darbe tepkisini deneysel olarak doğrudan elde etmek de güçtür. Halbuki konvolüsyon işleminin birleşme ve değişme özelliklerinin sonucu olan seri bağlı DZD sistem bloklarının yer değiştirilebilmesi avantajından faydalanarak birim basamak giriş ile dolaylı olarak hesaplayabiliriz; çünkü birim darbe, birim basamağın türevidir.



Ayrık zamanlıda da benzer eşdeğerlik olduğundan DZD sistemlerde birim basamak tepkisi ($s[n]$ veya $s(t)$) kullanışlı bir sinyaldir.

u ile δ arasındaki ilişki DZD olduğundan, aynı ilişki s ile h arasında da geçerlidir:

$$u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\boxed{s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau} \qquad \boxed{s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]}$$

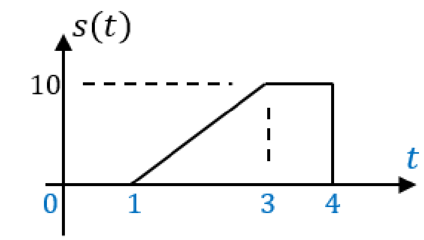
Bu ilişkiler tersten de yazılabilir:

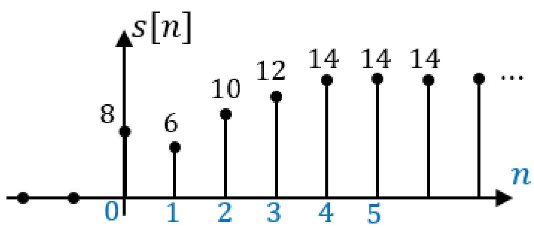
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

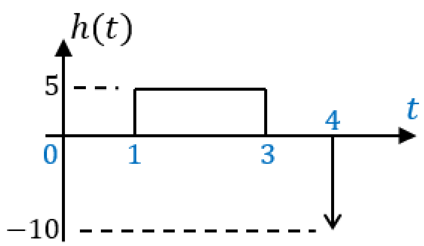
$$\boxed{h(t) = \frac{ds(t)}{dt}} \qquad \boxed{h[n] = s[n] - s[n-1]}$$

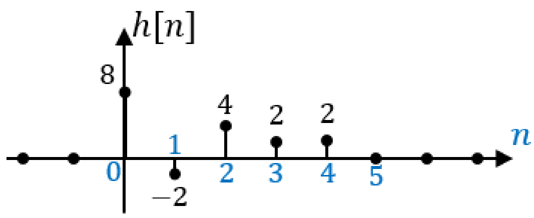
s ile h arasındaki, ilişkiyi yol ile hız arasındaki ilişkiye benzetilebilir.

Örnekler:









Sıradaki konu, bu konuyla ilgili çok sayıda örnek de içermektedir.

DZD Sistemlerde Çıkışı Konvolüsyonsuz Bulma Kolaylıkları

Birim darbe tepkisi (h), birim basamak tepkisi (s), veya girişin (u) aşağıdaki biçimlerden birinde olması halinde konvolüsyonla hiç uğraşmadan çıkışı (y) bulma kolaylıklarından faydalanabiliriz.

1) a) DZD bir $h = f_1(\delta)$ ilişkisi yazılabiliyorsa,
$y = f_1(x)$ yazılabilir.

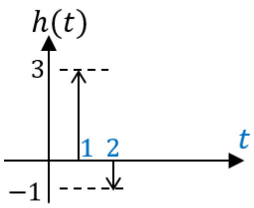
b) DZD bir $s = f_1(u)$ ilişkisi yazılabiliyorsa,
$y = f_1(x)$ yazılabilir.

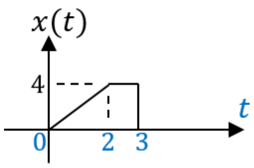
2) DZD bir $x = f_2(\delta)$ ilişkisi yazılabiliyorsa,
$y = f_2(h)$ yazılabilir. Bu, (1.a)'daki kural ve h ile x arasındaki değişme özelliği ile hatırlanabilir.

3) DZD bir $x = f_3(u)$ ilişkisi yazılabiliyorsa,
$y = f_3(s)$ yazılabilir.

4) δ ve u 'ya göre DZD bir $x = f_4(\delta, u)$ ilişkisi yazılabiliyorsa,
$y = f_4(h, s)$ yazılabilir.

Örnek:

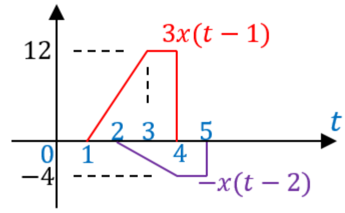


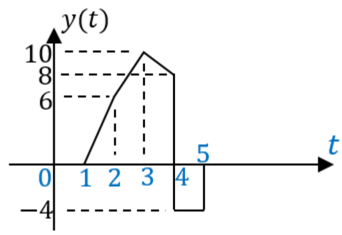


Birim darbe tepkisi h ve girişi x solda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

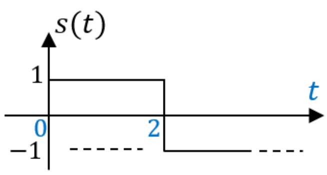
Çözüm: $h(t) = 3\delta(t-1) - \delta(t-2)$
$y(t) = 3x(t-1) - x(t-2)$

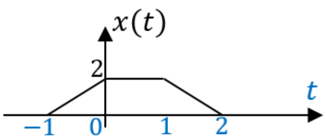
Çizimler sağdadır. İki bileşeni önce ayrı ayrı çizilmiş, altına da toplamı olan $y(t)$ çizilmiştir.





Örnek:

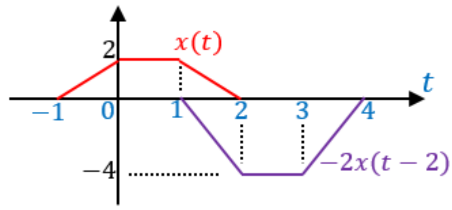


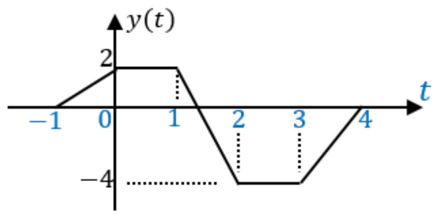


Birim basamak tepkisi s ve girişi x solda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

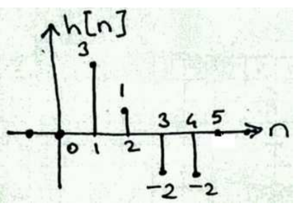
Çözüm: $s(t) = u(t) - 2u(t-2)$
$y(t) = x(t) - 2x(t-2)$

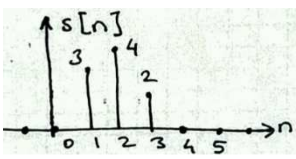
Çizimler sağdadır. İki bileşeni önce ayrı ayrı çizilmiş, altına da toplamı olan $y(t)$ çizilmiştir.





Örnek:

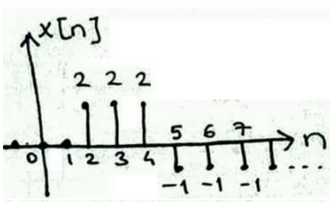


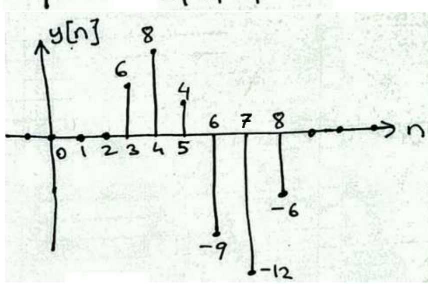


Birim darbe tepkisi h solda, girişi x sağda verilen DZD sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

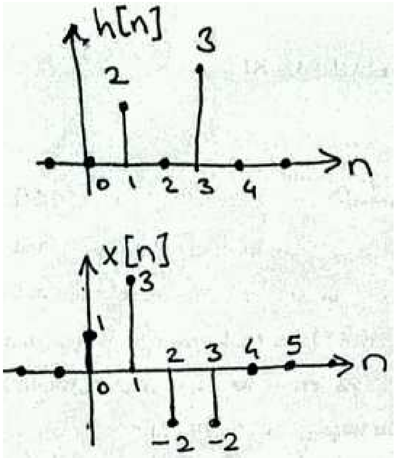
Çözüm: $x[n] = 2u[n-2] - 3u[n-5]$
$y[n] = 2s[n-2] - 3s[n-5]$

Önce $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$ formülüyle soldaki $s[n]$ çizilir. y'nin iki bileşeninin sıfırdan farklı kısımları birbiriyle çakışmadığı için sağdaki $y[n]$ kolayca çizilir.





Örnek:

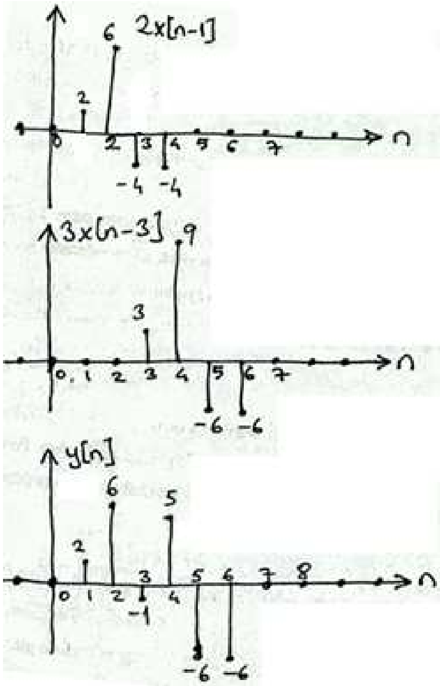


Birim darbe tepkisi h ve girişi x solda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

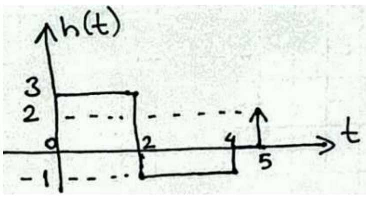
Çözüm:

$$h[n] = 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3]$$
$$y[n] = 2x[n-1] + 3x[n-3]$$

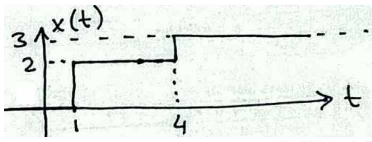
Çizimler sağdadır. İki bileşeni önce ayrı ayrı çizilmiş, altına da toplamı olan $y[n]$ çizilmiştir.



Örnek:

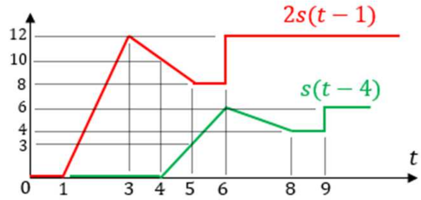


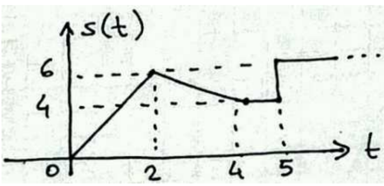
Birim darbe tepkisi h solda, girişi x sağda verilen DZD sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.



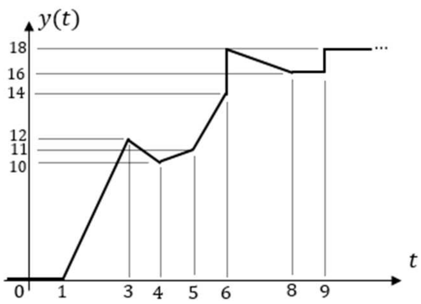
Çözüm:

$$x(t) = 2u(t-1) + u(t-4)$$
$$y(t) = 2s(t-1) + s(t-4)$$

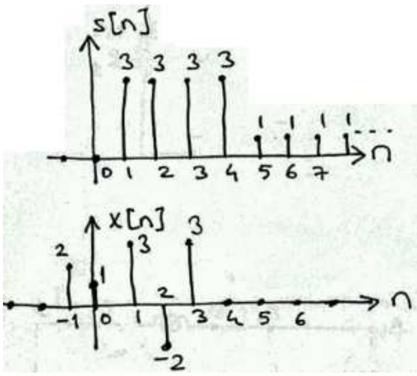




Önce $s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ formülüyle soldaki $s(t)$ çizilir. Sonra y'nin iki bileşeni ayrı ayrı çizilip toplanır. Sağdaki $y(t)$ çizilir.



Örnek:

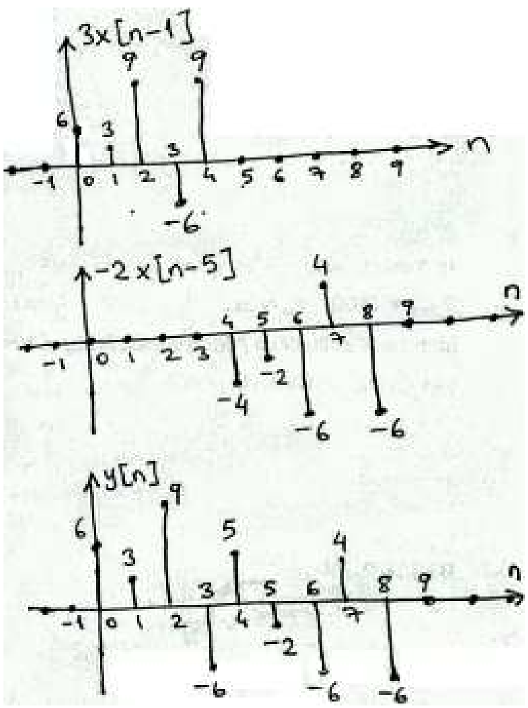


Birim basamak tepkisi s ve girişi x solda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

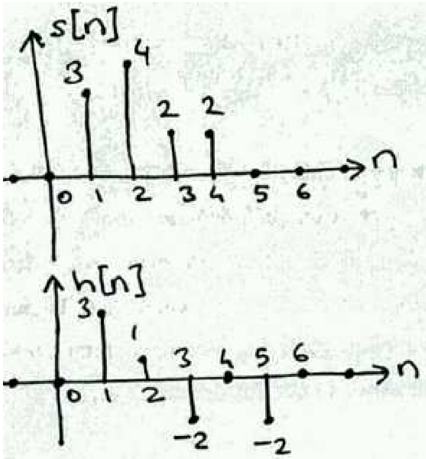
Çözüm:

$$s[n] = 3u[n-1] - 2u[n-5]$$
$$y[n] = 3x[n-1] - 2x[n-5]$$

Çizimler sağdadır. İki bileşeni önce ayrı ayrı çizilmiş, altına da toplamı olan $y[n]$ çizilmiştir.



Örnek:

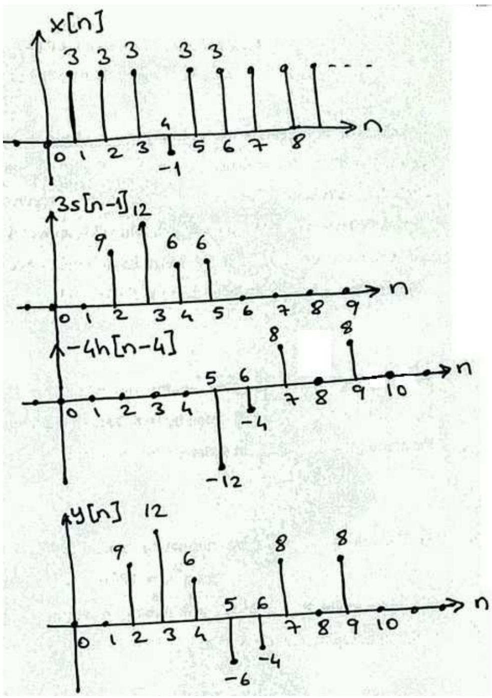


Birim basamak tepkisi s solda, girişi x sağda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

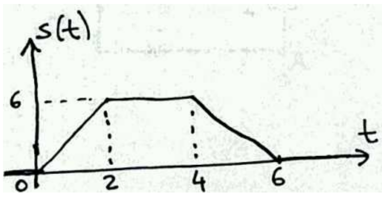
Çözüm:

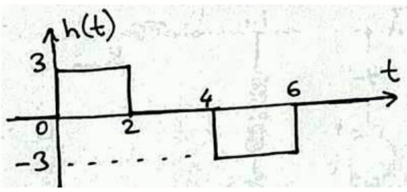
$$x[n] = 3u[n-1] - 4\delta[n-4]$$
$$y[n] = 3s[n-1] - 4h[n-4]$$

Önce $h[n] = s[n] - s[n-1]$ formülüyle $h[n]$ sol alttaki gibi çizilir. Sonra sağdaki gibi önce bileşenler alt alta çizilir. En son da altına toplamı olan $y(t)$ çizilir.



Örnek:





Birim basamak tepkisi s solda, girişi x sağda verilen sistemin çıkışı y 'yi çiziniz.

Çözüm:

$$x(t) = 2u(t-2) + 2\delta(t-1)$$
$$y(t) = 2s(t-2) + 2h(t-1)$$

Önce $h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$ formülüyle $h(t)$ sol alttaki gibi çizilir. Sonra sağdaki gibi önce bileşenler alt alta çizilir. En son da altına toplamı olan $y(t)$ çizilir.