Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI
14.11.2014 Süre: 80 dakika

1) Transfer fonksiyonu $T(s) = \dfrac{K(s-1)}{(s+2)(s^2+6s+13)}$ olan sistem için,

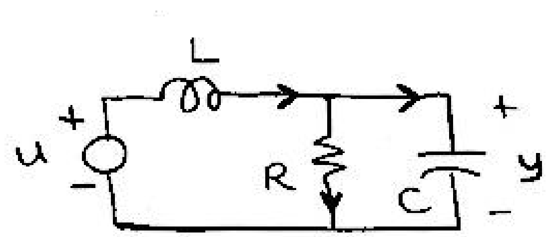
a) Kutup ve sıfırları karmaşık "s" düzleminde gösteriniz. **(7 puan)**

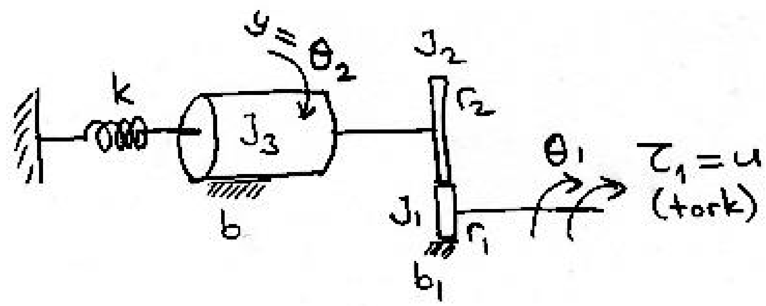
b) Giriş sinyalinin frekansı sıfıra doğru azaltıldıkça sistemin kazancı mutlak değerce 2'ye yakınsıyor. $K > 0$ olduğuna göre K kaçtır? **(5 puan)**

c) Sistem kararlı mıdır? **(5 puan)**

d) Sistemin giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi yazınız. **(8 puan)**

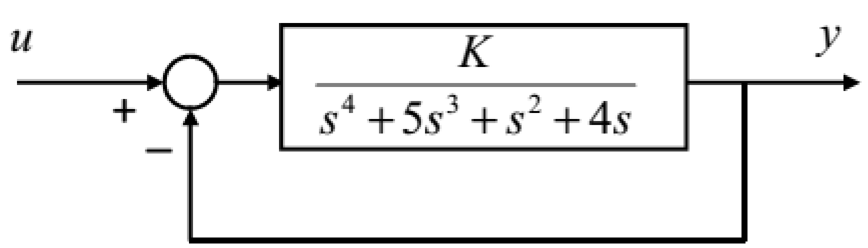
2) Aşağıdaki iki sistemden istediğiniz birinin, önce giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi bulunuz, sonra $G(s) = Y(s)/U(s)$ transfer fonksiyonunu çıkartınız. **(25 puan)**





3) Birinci mertebeden doğrusal zamanla değişmez bir sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t) = 5 - 4e^{-3t}$ olduğuna göre sistemin transfer fonksiyonunu yazınız **(15 puan)**. Birim basamak tepkisi $y_b(t)$ 'yi çiziniz. Çizimde $y_b(0^+)$ ve $y_b(\infty)$ değerleri belli olsun **(5 puan).** Giriş frekansı sonsuza doğru yükseltilirken sistem kazancı kaça yakınsar **(5 puan)**?

4) Aşağıda verilen sistem K 'nın hangi değer aralığında kararlıdır? **(25 puan)**



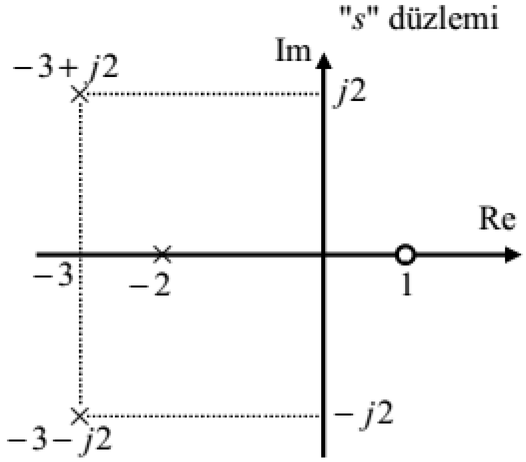
BAŞARILAR … **Yard. Doç. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI

14.11.2014

1) a) Payın tek kökü, yani bir tane sıfır vardır: $z = 1$ **.** Paydanın ise 3 kökü, yani 3 kutbu vardır: $p_1 = -2$, $p_{2,3} = -3 \mp j2$. Yanda "s" düzleminde gösterilmiştir.



b) Giriş sinyalinin frekansı ω için mutlak değerce kazanç $s = j\omega$ transfer fonksiyonda yazılıp $|T(j\omega)|$ şeklinde bulunur. $\omega \to 0$ için $s \to 0$ olacağından sistemin kazancı

$$|T(0)| = \lim_{s\to 0} \left| \frac{K(s-1)}{(s+2)(s^2+6s+13)} \right| = \left| \frac{-K}{26} \right| = 2$$

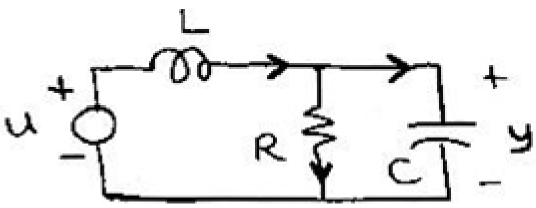
ve $K > 0$ olduğuna göre $\boxed{K = 52}$

c) Sistem kararlıdır, çünkü bütün kutuplar negatif reel kısımlıdır, yani sol yarı bölgededir. Sağ yarı bölgede sıfır olmasının kararlılığa zararı yoktur.

d) $T(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{Ks - K}{s^3 + 8s^2 + 25s + 26}$ $\quad\rightarrow\quad$ $(s^3 + 8s^2 + 25s + 26)Y(s) = (Ks - K)U(s)$

s çarpanı zaman uzayında türeve karşılık gelir: $\boxed{\dddot{y}(t) + 8\ddot{y}(t) + 25\dot{y}(t) + 26y(t) = K\dot{u}(t) - Ku(t)}$

2)



Her türevsel eleman için bir denklem yazılır. L üzerindeki akıma i dersek:

$u - y = L\dfrac{di}{dt}$ $\qquad$ i 'den direnç akımını çıkartırsak

C 'nin akımını buluruz: $\qquad i - \dfrac{y}{R} = C\dfrac{dy}{dt}$ $\qquad$ Her iki denklemin de Laplace dönüşümü alınıp düzenlenerek

$U(s) - Y(s) = sL\,I(s)$ $\qquad$ ve $\qquad$ $I(s) = \left(\dfrac{1}{R} + sC\right)Y(s)$ $\qquad$ bulunur. $I(s)$ 'i diğerinde yerine yazalım:

$$U(s) - Y(s) = \left(\frac{sL}{R} + s^2LC\right)Y(s) \qquad \rightarrow \qquad \left(1 + \frac{sL}{R} + s^2LC\right)Y(s) = U(s)$$

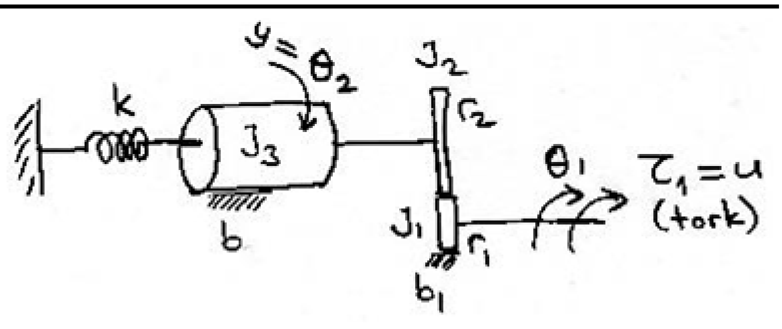
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2LC + \frac{sL}{R} + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$ bulunur.

Yandaki sistemde $r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ ve $\dfrac{\tau_1}{r_1} = \dfrac{\tau_2}{r_2}$

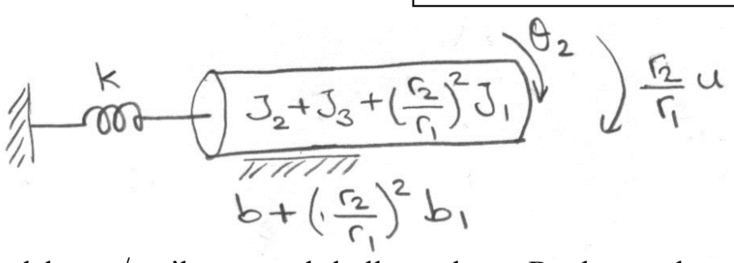
(τ_1 'in yansıtılmışına τ_2 dedik). Buna göre

1. eksendeki u torku, 2. eksende $\dfrac{r_2}{r_1}u$ olarak

görülür. Diğer yandan,



$J_1\ddot{\theta}_1 = J_1 \frac{r_2}{r_1}\ddot{\theta}_2$ ve $b_1\dot{\theta}_1 = b_1 \frac{r_2}{r_1}\dot{\theta}_2$



yazılabilir. Bunlar 1. taraftaki tork değerine maruz kalan bileşenlerdir. Bunları 2. taraftaki torka maruz kalır gibi ve θ_2 'ye göre kullanacaksak katsayılarını bir kez daha r_2/r_1 ile çarparak kullanmalıyız. Böylece yukarıdaki eşdeğer şekli elde ederiz. Buna göre dinamik denklemi yazarsak

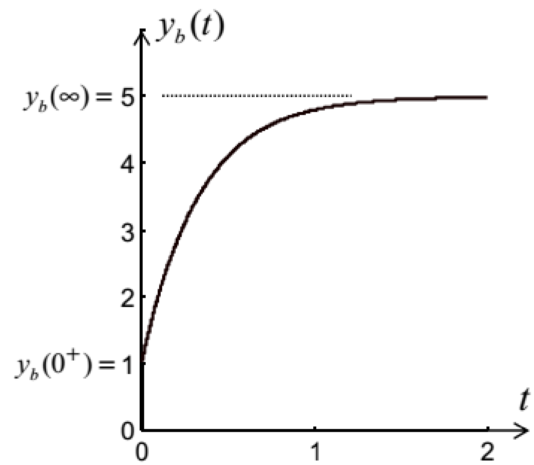
$\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)\ddot{\theta}_2 = \frac{r_2}{r_1}u - \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)\dot{\theta}_2 - k\theta_2$ Düzenlenip $y = \theta_2$ yazılarak Laplace dönüşümünü alınırsa,

$\left\{\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)s^2 + \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)s + k\right\}Y(s) = \frac{r_2}{r_1}U(s)$ Buradan da transfer fonksiyon şöyle bulunur:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{r_2/r_1}{\left(J_2 + J_3 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]J_1\right)s^2 + \left(b + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}\right]b_1\right)s + k}$$

İstenseydi herşey 1. tarafa yansıtılarak da işlem yapılabilirdi. O zaman payın ve paydanın r_1^2/r_2^2 ile çarpılmışı olan, yani yukardakine eşit şu ifade bulunurdu:

$$G(s) = \frac{r_1/r_2}{\left(J_1 + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right](J_2 + J_3)\right)s^2 + \left(b_1 + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]b\right)s + \left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]k}$$



3) $y_b(t) = 5 - 4e^{-3t} \;\rightarrow\; Y_b(s) = \frac{5}{s} - \frac{4}{s+3} = T(s)U(s) = T(s)\cdot\frac{1}{s}$

$\rightarrow T(s) = 5 - \frac{4s}{s+3} = \frac{5s + 15 - 4s}{s+3} \;\rightarrow\; \boxed{T(s) = \frac{s+15}{s+3}}$

$s = j\omega$ yazılarak $\lim_{s\to j\infty}|T(s)| = \lim_{s\to j\infty}\left|\frac{s+15}{s+3}\right| = 1$

Sonsuz yüksek frekans kazancı 1 bulunur.

4) Kutu içini $G(s)$, ve $H(s) = 1$ alarak $T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K}{s^4 + 5s^3 + s^2 + 4s + K}$ bulunur. Kararlılık için paydanın köklerinin hiçbiri sağ yarı bölgede olmamalı, bunun için de Routh-Hurwitz testinde ilk sütun hep aynı işaretli olmalıdır:

s^4	**1**	**1**	***K***	**0**
s^3	**5**	**4**	**0**	**0**
s^2	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$	K	0	
s^1	$4 - \frac{5K}{1/5} = 4 - 25K$	0	0	
s^0	K	0		

İlk sütun artıyla başladığı için hep artı olmalıdır. Yani $K > 0$ ve $4 - 25K > 0$ olmalıdır. Yani $\boxed{0 < K < \frac{4}{25}}$

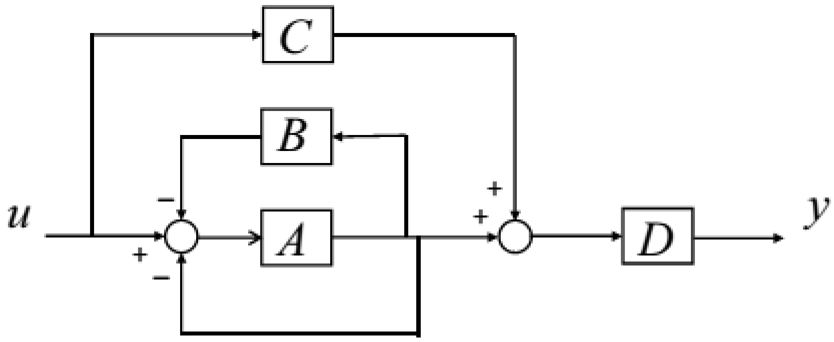
Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI

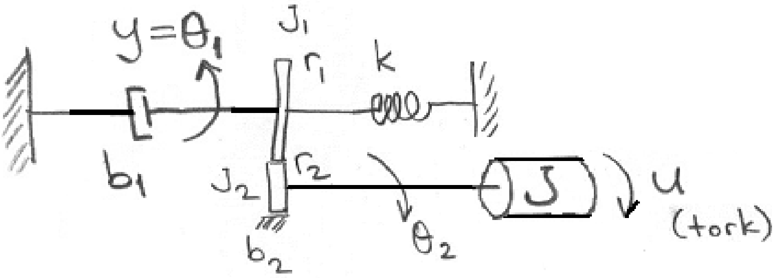
13.11.2015 Süre: 80 dakika

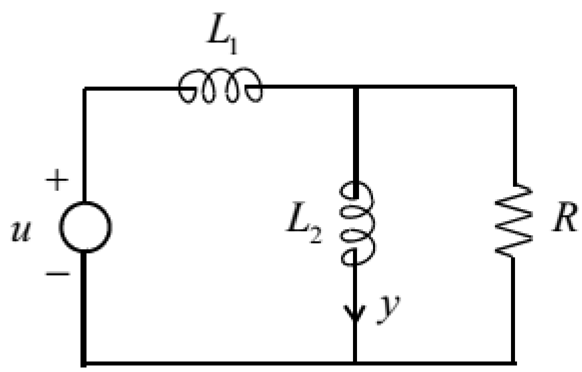
1) Transfer fonksiyonu $T(s)=\dfrac{2s}{s^2+4s+5}$ olan sistem nasıl bir filtreleme yapar (alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren), neden? Sistem kararlı mıdır? Sistemin giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi yazınız. **(15 puan)**

2) Aşağıda doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin blok diyagramı verilmiştir. Her alt sistemin transfer fonksiyonu harflerle gösterilmiştir. Bütün sistemin transfer fonksiyonunu A, B, C, D cinsinden bulunuz. (Kesirli terim olursa pay veya paydasında başka kesir kalmasın). **(15 puan)**



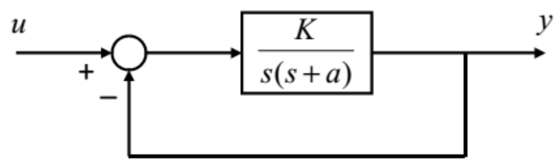
3) Yandaki ya da aşağıdaki sistemin önce giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi bulunuz, sonra $G(s)=Y(s)/U(s)$ transfer fonksiyonunu çıkartınız. **(25 puan)**





4) Transfer fonksiyonu $T(s)=\dfrac{2s+6}{s+5}$ olan sistemin birim basamak tepkisini ($y_b(t)$) bulunuz ve çiziniz **(12 puan)**. Sistemin alçak frekans ($\lim \omega \to 0$) ve yüksek frekans ($\lim \omega \to \infty$) kazançlarını bulunuz. Bu kazançların $y_b(0^+)$ ve $y_b(+\infty)$ değerleriyle ilişkisini de yazınız. **(8 puan)**

5) Yandaki sistemin birim basamak tepkisinde maksimum aşma M = %10 ve %2'lik durulma zamanı $t_d = 5$ saniye isteniyor. Buna göre K ve a ne olmalıdır? Bu durumda yükselme zamanı t_y, sönüm katsayısı ξ, tepe zamanı (t_p) ne olur? **(25 puan)**



$$M = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-\alpha\pi/\omega_d} \qquad t_d(\%2) \approx \frac{4}{\alpha} \qquad t_y = \frac{\pi-\phi}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \cos\phi = \frac{\alpha}{\omega_n} = \xi$$

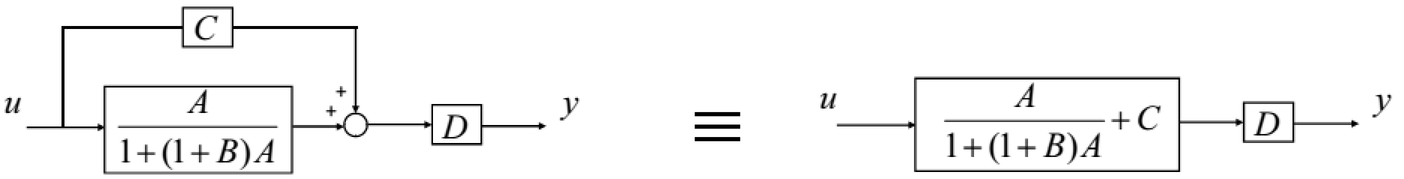
BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI
13.11.2015

1) $T(j\omega)=\dfrac{2j\omega}{(j\omega)^2+4(j\omega)+5}$ olup $\lim\limits_{\omega\to 0} T(j\omega)=0$ ve $\lim\limits_{\omega\to\infty} T(j\omega)=0$ ve $0<\omega<\infty$ için $T(j\omega)\neq 0$ olduğu için <u>band geçiren</u> filtre olarak davranır.

$$T(s)=\frac{2s}{s^2+4s+5}=\frac{Y(s)}{U(s)} \quad\rightarrow\quad \left(s^2+4s+5\right)Y(s)=2sU(s) \quad\rightarrow\quad \boxed{\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+5y(t)=2\dot{u}(t)}$$

2) En alttaki birim geribesleme kolu ile B üzerinden geribesleme paraleldir. (1+B) diye negatif geribesleme yönünde birleştirilebilir.



Dolayısıyla transfer fonksiyon: $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{AD}{1+A+AB}+CD}$

3) <u>Elektrik devresi:</u>

L_1 üzerindeki akıma i_1 diyelim. L_1 ve L_2 üzerindeki gerilimlerin toplamı u olduğu için $u=L_1\dfrac{di_1}{dt}+L_2\dfrac{dy}{dt}$ Ayrıca R üzerindeki akım $\left(L_2\dfrac{dy}{dt}\right)\Big/R$ olduğu için $i_1=y+\dfrac{L_2}{R}\dfrac{dy}{dt} \rightarrow I_1(s)=Y(s)+\dfrac{sL_2}{R}Y(s)$

Bunu, ilk denklemin Laplace dönüşümünde yerine yazalım:

$$U(s)=sL_1I_1(s)+sL_2Y(s) \quad\rightarrow\quad U(s)=sL_1\left(1+\frac{sL_2}{R}\right)Y(s)+sL_2Y(s)=\left(\frac{L_1L_2}{R}s^2+(L_1+L_2)s\right)Y(s)=U(s)$$

En sağdaki eşitlikten $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{R}{L_1L_2s^2+R(L_1+L_2)s}}$

<u>Mekanik sistem:</u>

1. yol: Herşeyi 1. eksende düşünürsek, J_2, J ve b_2 'yi r_1^2/r_2^2 ile, giriş torkunu ise r_1/r_2 ile çarparak yansıtırız:

$$\left[J_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\left(J_2+J\right)\right]\ddot{\theta}_1+\left[b_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}b_2\right]\dot{\theta}_1+k\theta_1=\frac{r_1}{r_2}u \quad\rightarrow\quad \frac{\Theta_1(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{r_1/r_2}{\left[J_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\left(J_2+J\right)\right]s^2+\left[b_1+\frac{r_1^2}{r_2^2}b_2\right]s+k}$$

2. yol: Herşeyi 2. eksende düşünürsek, J_1, k ve b_1 'i r_2^2/r_1^2 ile çarparak yansıtırız:

$$\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}J_1+J_2+J\right]\ddot{\theta}_2+\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}b_1+b_2\right]\dot{\theta}_2+\frac{r_2^2}{r_1^2}k\theta_2=u$$

Ayrıca $y=\left(r_2/r_1\right)\theta_2$ olduğundan,

$$\rightarrow \quad \frac{\frac{r_2}{r_1}\cdot\Theta_2(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r_2/r_1}{\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}J_1 + J_2 + J\right]s^2 + \left[\frac{r_2^2}{r_1^2}b_1 + b_2\right]s + \frac{r_2^2}{r_1^2}k}$$

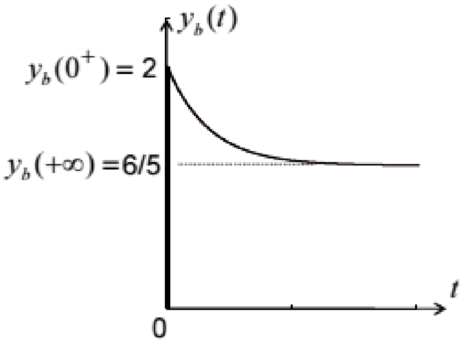
(İki çözümün de aynı sonucu verdiğini görünüz.)

4) Birim basamağın Laplace dönüşümü $1/s$ olduğu için

$$Y_b(s) = \frac{1}{s}T(s) = \frac{2s+6}{s(s+5)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+5}$$

$$a = \frac{2\cdot 0+6}{0+5} = 6/5 \quad \text{ve} \quad b = \frac{2\cdot(-5)+6}{-5} = 4/5$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y_b(t) = \frac{6}{5} + \frac{4}{5}e^{-5t} \quad , \quad t \geq 0}$$



Alçak frekans kazancı $\lim_{\omega\to 0} T(j\omega) = T(0) = 6/5 = y_b(+\infty)$

Yüksek frekans kazancı $\lim_{\omega\to\infty} T(j\omega) = T(\infty) = 2 = y_b(0^+)$

5) Kapalı döngü sistemin transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{K/(s^2+as)}{1+1\cdot K/(s^2+as)} = \frac{K}{s^2+as+K}$$

Bunu $\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\alpha s+\omega_n^2}$ diye düşününürüz. Yani $K = \omega_n^2$ ve $a = 2\alpha$.

(Dikkat: Yukarıdaki "s" Laplace dönüşümü değişkenidir. Aşağıdaki ifadelerdeki "s" ise saniyedir.)

Durulma zamanından $\alpha = 4/t_d = 4/(5s) = 0{,}8s^{-1} \rightarrow \quad a = 2\alpha = \boxed{a = 1{,}6\ s^{-1}}$

$$-\ln M = \alpha\pi/\omega_d \quad \rightarrow \omega_d = \frac{0{,}8\cdot\pi}{-\ln 0{,}10}\,rad/s = 1{,}09\,rad/s$$

$$K = \omega_n^2 = \alpha^2 + \omega_d^2 = \left(0{,}8^2 + 1{,}09^2\right)\,rad^2/s^2 = \boxed{K = 1{,}83\,rad^2/s^2}$$

$$\sqrt{K} = \sqrt{1{,}83}\ rad/s = \omega_n = 1{,}35\,rad/s \quad \rightarrow \quad \xi = \alpha/\omega_n = 0{,}8/1{,}35 = \boxed{\xi = 0{,}59}$$

$$\rightarrow \quad \xi = 0{,}59 = \cos\phi \quad \rightarrow \quad \phi = 53{,}8^\circ = 53{,}8\cdot\frac{\pi}{180}\ rad = 0{,}938\ rad = \phi$$

$$t_y = \frac{\pi - 0{,}938}{1{,}09}s = \boxed{t_y = 2{,}02s} \qquad\qquad t_p = \frac{\pi}{1{,}09}s = \boxed{t_p = 2{,}88s}$$

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI
04.11.2017 Süre: 80 dakika

1) Transfer fonksiyonu $T(s) = \dfrac{5(s-2)(s+3)}{(s+1)(s^2+6s+25)}$ olan sistemin

a) Kutup ve sıfırlarını karmaşık s düzleminde gösteriniz. **(6 puan)**

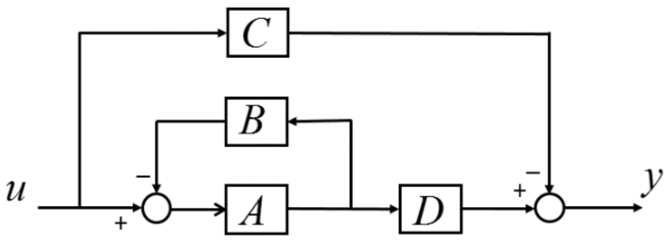
b) Alçak frekanslar ($\omega \to 0$) için sistem kazancını bulunuz. **(3 puan)**

c) Yüksek frekanslar ($\omega \to \infty$) için sistem kazancını bulunuz. **(3 puan)**

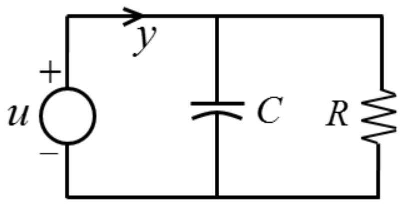
d) Sistem kararlı mıdır? Neden? **(3 puan)**

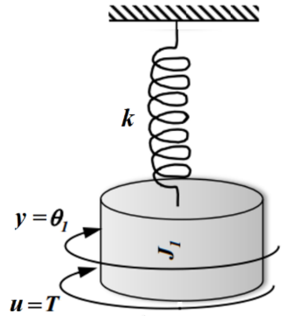
2) Transfer fonksiyonu $H(s) = \dfrac{3s-2}{s+1}$ olan sistemin birim basamak tepkisini ($y_b(t)$) bulunuz ve çiziniz. **(10+5 puan)**

3) Yanda doğrusal zamanla değişmez (DZD) bir sistemin blok diyagramı verilmiştir. Her alt sistemin transfer fonksiyonu harflerle gösterilmiştir. Bütün sistemin transfer fonksiyonunu A, B, C, D cinsinden bulunuz. (Kesirli terim olursa pay veya paydasında başka kesir kalmasın). **(15 puan)**

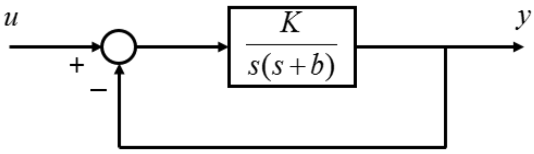


4) Yandaki iki sistemden yalnız birisinin $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ transfer fonksiyonunu bulunuz.





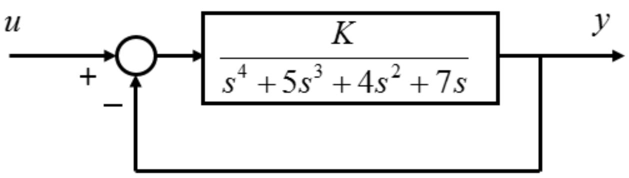
5) Aşağıdaki sistemin birim basamak tepkisinde maksimum aşma $M = \%8$ ve %5'lik durulma zamanı $t_d = 6$ saniye isteniyor. Buna göre K ve b ne olmalıdır? **(15 puan)**



$$M = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} = e^{-(\alpha\pi/\omega_d)}$$

$$t_d(\%5) \approx \frac{3}{\alpha}$$

6) Aşağıda verilen sistem K 'nın hangi aralığında kararlıdır? **(25 puan)**

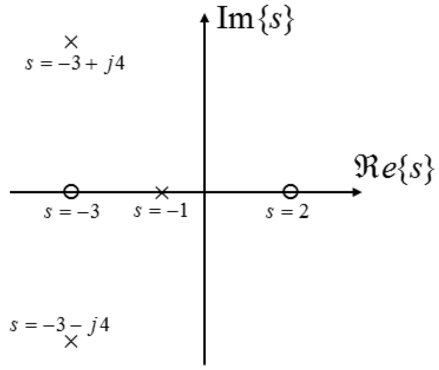


BAŞARILAR … **Yard. Doç. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI
04.11.2017

1) a) Transfer fonksiyonun payının kökleri 2 ve -3 sıfırlardır.

Paydasının kökleri $\dfrac{-6 \mp \sqrt{6^2 - 4\cdot 25}}{2} = -3 \mp j4$ ve -1 kutuplardır.



b) $s = j\omega = 0$ için $\left|T(0)\right| = \left|\dfrac{5\cdot(-2)\cdot 3}{1\cdot 25}\right| = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

c) $s = j\omega = j\infty$ için $\left|T(j\infty)\right| = 0$

d) Kararlıdır; çünkü bütün kutuplar sol yarı bölgededir.

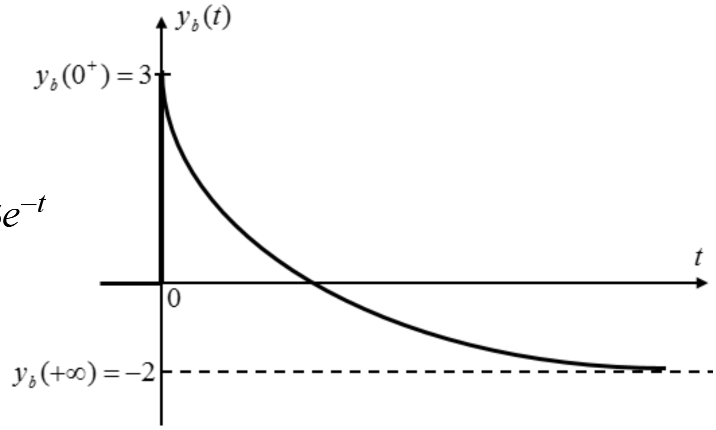
2) Birim basamağın Laplace dönüşümü $1/s$ olduğu için

$$Y_b(s) = H(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{3s-2}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}$$

$$a = \left.\frac{3s-2}{s+1}\right|_{s=0} = -2, \quad b = \left.\frac{3s-2}{s}\right|_{s=-1} = 5 \quad \rightarrow \quad y_b(t) = -2 + 5e^{-t}$$

Diğer yol: $y_b(t) = H(0) + \big(H(\infty) - H(0)\big)\cdot e^{-t/\tau} = -2 + 5e^{-t}$

(Burada -1/τ kutup yani -1 olduğundan τ =1 alındı.)



3) A ve B ikilisi geri beslemeli blok olup bu blok D ile seridir. Bu seri kol da C'ye paraleldir. Dolayısıyla

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A}{1+AB}D - C = \frac{AD - C - ABC}{1+AB}$$

4) Elektrik devresinde y, direnç ve kondansatörün aşağı doğru akımlarının toplamıdır. s domeninde C yerine $1/sC$ yazarsak:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{1/(sC)} + \frac{U(s)}{R} = \left(sC + \frac{1}{R}\right)U(s) \quad \rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = sC + \frac{1}{R}$$

Mekanik sistemde: $J_1\ddot{\theta}_1 = T - k\theta_1 \quad \rightarrow \quad J_1\ddot{y} + ky = u \quad \rightarrow \quad \left(J_1 s^2 + k\right)Y(s) = U(s) \quad \rightarrow \quad \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{J_1 s^2 + k}$

5) Geribeslemeli sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{K}{s^2+bs}}{1+\dfrac{K}{s^2+bs}} = \frac{K}{s^2+bs+K} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\alpha s+\omega_n^2}$$

Yani $\omega_n = \sqrt{K}$, $\alpha = b/2$. $\quad t_d(\%5) \approx \dfrac{3}{\alpha} = 6\mathrm{s} \;\rightarrow\; \alpha = 0{,}5\mathrm{s}^{-1} \;\rightarrow\; b = 2\times 0{,}5\mathrm{s}^{-1}$ $\quad\boxed{b = 1\mathrm{s}^{-1}}$

$$\ln M = \ln(0.08) = -2{,}526 = -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \;\rightarrow\; \left(\frac{2{,}526}{\pi}\right)^2 = 0{,}646 = \frac{\xi^2}{1-\xi^2}$$

$$0{,}646 = 1{,}646\xi^2 \;\rightarrow\; \xi = 0{,}627 = \alpha/\omega_n \;\rightarrow\; \omega_n = \alpha/\xi = 0{,}5\mathrm{s}^{-1}/0{,}627 = 0{,}797\,\mathrm{rad/s} \;\rightarrow\; K = \omega_n^2$$

$\boxed{K = 0{,}636\,\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2}$ (Burada eğik yazılan "*s*" Laplace değişkeni, düz yazılan "s" saniye anlamında kullanıldı.)

6) $G(s) = \dfrac{K}{s^4+5s^3+4s^2+7s}$, $H(s)=1$. $\quad 1+G(s)H(s)=0 \;\rightarrow\; s^4+5s^3+4s^2+7s+K=0$

s^4	**1**	**4**	***K***	**0**
s^3	**5**	**7**	**0**	**0**
s^2	$4-\dfrac{7}{5}=\dfrac{13}{5}$	K	0	
s^1	$7-\dfrac{5K}{13/5}=\dfrac{91-25K}{13}$	0	0	
s^0	K	0		

İlk sütunda işaret değişikliği olmamalı ki bütün kökler sol yarı bölgede olsun ve sistem kararlı olsun. Yani hem $91-25K>0$ hem de $K>0$ olmalı. Düzenlenirse:

$\boxed{0<K<3{,}64}$ olmalıdır.

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV SORULARI
10.11.2018 Süre: 70 dakika

Yazı, insanın okuması içindir. Okunaklı, yormayan ve anlaşılır ifadelerle yazmanız insana değer verdiğinizi gösterir.

1) Transfer fonksiyonu $T(s)=\dfrac{K(s-2)}{(s+4)\left(s^2+4s+13\right)}$ olan sistem için,

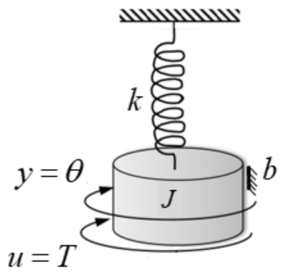
a) Kutup ve sıfırları karmaşık "s" düzleminde gösteriniz. **(7 puan)**

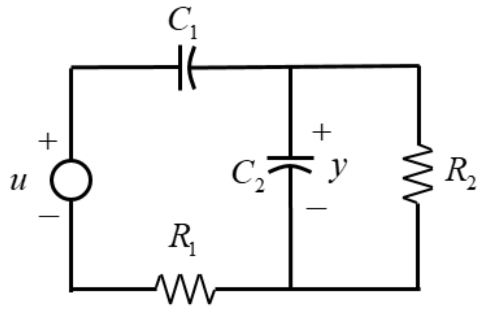
b) Giriş sinyalinin frekansı sıfıra doğru azaltıldıkça sistemin kazancı mutlak değerce 3'e yakınsıyor. $K>0$ olduğuna göre K kaçtır? **(5 puan)**

c) Sistem kararlı mıdır? **(5 puan)**

d) Sistemin giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi yazınız. **(8 puan)**

2) Aşağıdaki iki sistemden istediğiniz birinin, $G(s)=Y(s)/U(s)$ transfer fonksiyonunu ve giriş(u)-çıkış(y) ilişkisini gösteren diferansiyel denklemi bulunuz. **(25 puan)**

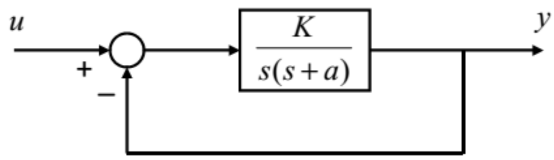




3) Transfer fonksiyonu $H(s)=\dfrac{2s+4}{s+3}$ olan sistemin birim basamak tepkisi $y_b(t)$ 'yi yazınız ve çiziniz. Çizimde $y_b(0^+)$ ve $y_b(\infty)$ değerleri belli olsun. Giriş frekansı sonsuza doğru yükseltilirken sistem kazancı kaça yakınsar?

(25 puan)

4) Yandaki sistemin birim basamak tepkisinde maksimum aşma M = %8 ve %2'lik durulma zamanı $t_d=2$ saniye isteniyor. Buna göre K ve a ne olmalıdır? Bu durumda yükselme zamanı t_y , sönüm katsayısı ξ , tepe zamanı (t_p) ne olur? **(25 puan)**



$$M=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-\alpha\pi/\omega_d}\qquad t_d(\%2)\approx\frac{4}{\alpha}\qquad t_y=\frac{\pi-\phi}{\omega_d}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}\qquad \cos\phi=\frac{\alpha}{\omega_n}=\xi$$

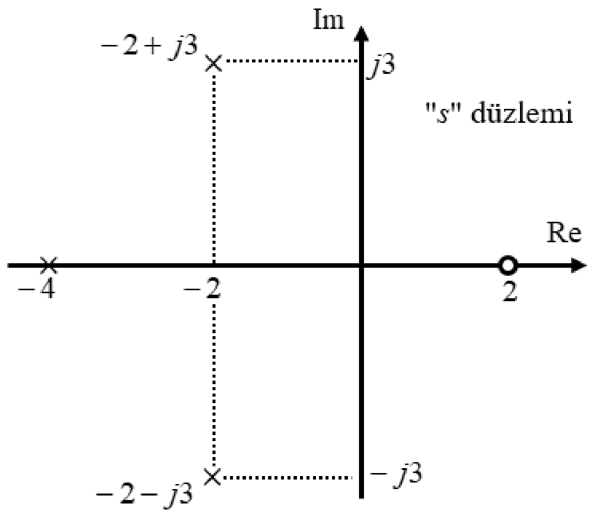
BAŞARILAR …

Makine Mühendisliği Bölümü

SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL ARASINAV CEVAP ANAHTARI

10.11.2018

1) a) Payın tek kökü, yani bir tane sıfır vardır: $z = 2$ **.** Paydanın ise 3 kökü, yani 3 kutbu vardır: $p_1 = -4$**,** $p_{2,3} = -2 \mp j3$**.** Yanda "s" düzleminde gösterilmiştir.



b) Giriş sinyalinin frekansı ω için mutlak değerce kazanç $s = j\omega$ transfer fonksiyonda yazılıp $|T(j\omega)|$ şeklinde bulunur. $\omega \to 0$ için $s \to 0$ olacağından sistemin kazancı

$$|T(0)| = \lim_{s\to 0} \left| \frac{K(s-2)}{(s+4)\left(s^2+4s+13\right)} \right| = \left| \frac{-2K}{52} \right| = 3$$

ve $K > 0$ olduğuna göre $\boxed{K = 78}$

c) Sistem kararlıdır, çünkü bütün kutuplar negatif reel kısımlıdır, yani sol yarı bölgededir. Sağ yarı bölgede sıfır olmasının kararlılığa zararı yoktur.

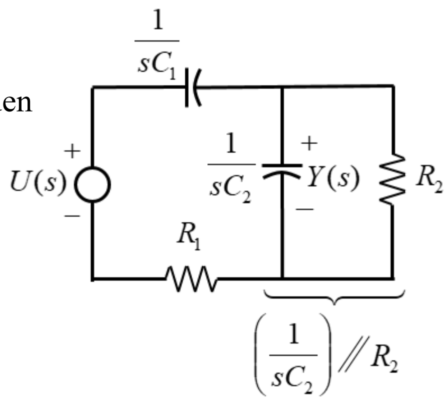
d) $T(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{Ks - 2K}{s^3 + 8s^2 + 29s + 52} \quad \to \quad \left(s^3 + 8s^2 + 29s + 52\right)Y(s) = (Ks - 2K)U(s)$

s çarpanı zaman uzayında türeve karşılık gelir: $\boxed{\dddot{y}(t) + 8\ddot{y}(t) + 29\dot{y}(t) + 52y(t) = K\dot{u}(t) - 2Ku(t)}$

2) Mekanik sistemde: $J\ddot{\theta} = T - k\theta - b\dot{\theta} \;\to\; J\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \;\to\; \left(Js^2 + bs + k\right)Y(s) = U(s) \;\to$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k}$$

Elektrik devresinde ise paralel kolun gerilimi $Y(s)$ olup gerilim bölücüden $Y(s)=U(s)\cdot$(ortadaki paralel kolun empedansı) / (toplam empedans)



Ortadaki paralel kolun empedansı $= \dfrac{\dfrac{R_2}{sC_2}}{\dfrac{1}{sC_2} + R_2} = \dfrac{R_2}{1 + R_2C_2s}$ olduğundan,

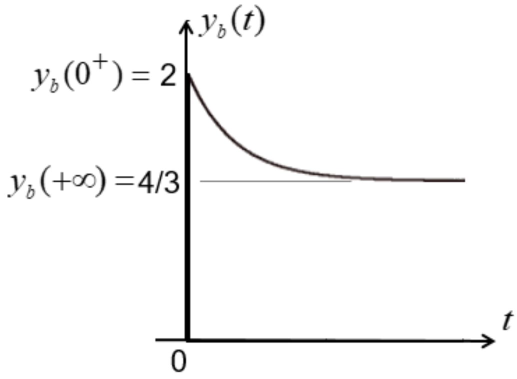
$$Y(s) = \frac{\dfrac{R_2}{1+R_2C_2s}}{\dfrac{1}{sC_1} + \dfrac{R_2}{1+R_2C_2s} + R_1} U(s) \quad \to \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2C_1s}{1 + R_2C_2s + R_2C_1s + R_1C_1s\cdot\left(1 + R_2C_2s\right)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2C_1s}{R_1R_2C_1C_2s^2 + \left(R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2\right)s + 1} \quad \to \quad R_1R_2C_1C_2\ddot{y} + \left(R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2\right)\dot{y} + y = R_2C_1\dot{u}$$

3) $y_b(0^+) = H(\infty) = 2$, $y_b(+\infty) = H(0) = 4/3$, kutup = -3

$\to \quad y_b(t) = y_b(+\infty) + [y_b(0^+) - y_b(+\infty)]e^{-3t} = \frac{4}{3} + \left(2 - \frac{4}{3}\right)e^{-3t}$

$y_b(t) = \frac{4+2e^{-3t}}{3}$



SMOK-V-2018-CA-2

Veya $Y_b(s) = \dfrac{2s+4}{s+3}\cdot\dfrac{1}{s} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2/3}{s+3}$ 'ün ters Laplace dönüşümüyle de $y_b(t)$ bulunabilirdi. Giriş frekansı sonsuza doğru yükseltilirken sistem kazancı $= H(\infty) = 2$ olur.

4) Geribeslemeli sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{\dfrac{K}{s^2+as}}{1+\dfrac{K}{s^2+as}} = \dfrac{K}{s^2+as+K} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\alpha s+\omega_n^2}$

Yani $\omega_n = \sqrt{K}$, $\alpha = a/2$. $t_d(\%2) \approx \dfrac{4}{\alpha} = 2\mathrm{s}$ $\rightarrow$ $\alpha = 2\mathrm{s}^{-1}$ $\rightarrow$ $a = 2\times 2\mathrm{s}^{-1}$ $\boxed{a = 4\mathrm{s}^{-1}}$

$\ln M = \ln(0.08) = -2{,}526 = -\dfrac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $\rightarrow$ $\left(\dfrac{2{,}526}{\pi}\right)^2 = 0{,}646 = \dfrac{\xi^2}{1-\xi^2}$

$0{,}646 = 1{,}646\xi^2$ $\rightarrow$ $\xi = 0{,}627 = \alpha/\omega_n$ $\rightarrow$ $\omega_n = \alpha/\xi = 2\mathrm{s}^{-1}/0{,}627 = 3{,}19\,\mathrm{rad/s}$ $\rightarrow$ $K = \omega_n^2$
$\boxed{K = 10{,}2\,\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 3{,}19\sqrt{1-0{,}627^2}\ \mathrm{rad/s} = 2{,}49\ \mathrm{rad/s}$

$\xi = \cos\phi = 0{,}627$ $\rightarrow$ $\phi = 51{,}2^\circ = 0{,}894\,\mathrm{rad}$

$t_y = \frac{\pi - 0{,}894}{2{,}49}\mathrm{s} = 0{,}90\ \mathrm{s}$ $t_p = \frac{\pi}{2{,}49}\mathrm{s} = 1{,}26\ \mathrm{s}$

(Burada eğik yazılan "*s*" Laplace değişkeni, düz yazılan "s" saniye anlamında kullanıldı.)