Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI
07.01.2015 Süre: 75 dakika

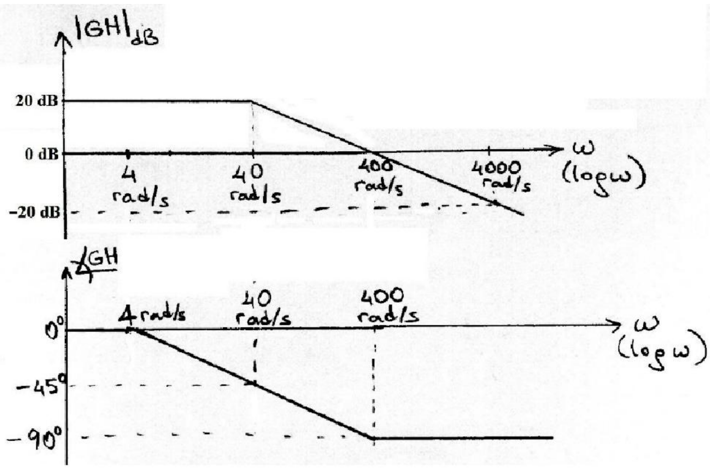
Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.

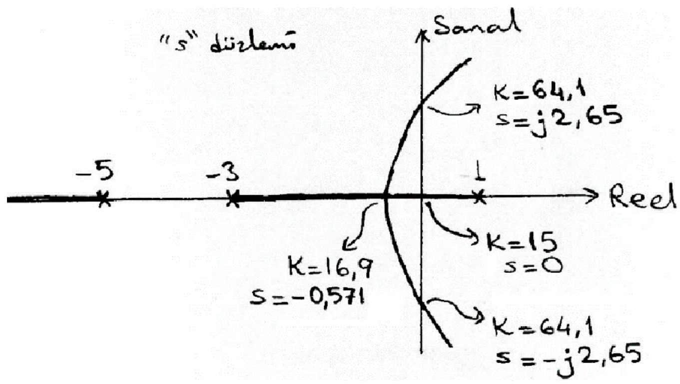
1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+2s-8)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) ve açı eğrileri doğrusallaştırılmış yaklaşık parçalar halinde aşağıda solda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu (GH) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**





3) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıda sağdaki şekilde verilmiştir (Üç adet açık döngü kutup var, açık döngü sıfır yok). Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(15 puan)**

b) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

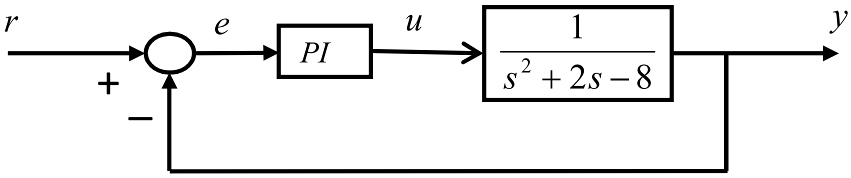
4) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{5}{s^2+3s+2}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & -9\end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
07.01.2015

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\frac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}}{1+\frac{K_P s + K_I}{s(s^2+2s-8)}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3+2s^2+(K_P-8)s+K_I}$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 8)$	0
s^2	2	K_I	0
s^1	$K_P - 8 - (K_I/2)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P - 8 - (K_I/2) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 2K_P - 16$ olmalıdır. Meselâ, $K_P = 10$, $K_I = 2$ olabilir.

2) a) Genlik(dB) eğrisindeki tek köşe frekansı 40 rad/s = 1/τ , yani = 25ms'dir. Köşe frekansının solundan sağına eğim -20dB/dekad değiştiği için paydada (1+$s\tau$) terimi vardır. Açı eğrisindeki köşelerin 4 rad/s ve 400 rad/s frekanslarda (1 dekad öncesi ve 1 dekad sonrası) olması ve aradaki eğimin -45°/dekad olması da bunu doğrular. Köşe frekansından önce (en sol tarafta) genlik(dB) eğrisinin eğimi sıfır olduğundan s çarpanı bulunmamaktadır. Başkaca bir köşe olmamasından anlarız ki açık döngü transfer fonksiyon: $GH = \frac{K}{(1+s\tau)}$

K'yı bulmak için dB değeri bilinen özel bir frekansta meselâ ω < 40 rad/s'de

Genlik(dB) = $|K|_{dB} + \left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 20\ dB$ olduğu görülmektedir. Bu yaklaşık çizim yönteminde köşe frekansında $\left|\frac{1}{1+s\tau}\right|_{dB} = 0\ dB$ kabul edilmektedir. Dolayısıyla $|K|_{dB} = 20\ dB \;\rightarrow\; K = 10^{20/20} = 10$ bulunur. Sonuç: $GH = \frac{10}{(1+0{,}025\cdot s)}$

b) Bode açık döngü eğrilerinde, açının -180° olduğu frekansta genlik kazancı ≥ 0dB ise, ya da genlik kazancının 0dB olduğu frekansta açı -180° veya daha aşağıda ise, kapalı döngü sistem kararsızdır. Burada açı hiç -180° olmamaktadır. Genlik kazancı 0dB iken de açı -180°'nin üzerindedir. Kararsızlık durumlarının ikisi de olmadığı için sistem kararlıdır.

3) × ile gösterilen açık döngü kutuplarda K = 0'dır. Kök yer eğrisi boyunca bu noktalardan uzaklaşıldıkça K artmaktadır. K > 15 olmaya başlayınca sağda hiç kök kalmamakta, K = 16,9 olunca köklerden ikisi s = -0,571'de çakışmaktadır. K biraz daha artırılınca köklerin ikisi karmaşık (eşlenik çift) olmakta, ve nihayet K > 64,1 için eşlenik çift olan iki kök sağ yarı bölgeye geçmektedir. K 'nın tüm bu değişimi sırasında üçüncü kök -5'in daha daha sol tarafına doğru reel kalarak kaymaktadır. Buna göre,

a) Yalnızca 15 < K < 64,1 için köklerin üçü de sol yarı bölgede olduğu için sistem negatif olmayan sadece bu K değer aralığı için kararlıdır.

b) En sağdaki kökün geldiği en sol nokta ayrılma noktasıdır. Bu noktada $K = 16{,}9$ ve en sağdaki (çakışan) iki kök $s = -0{,}571$ olmaktadır. (Kök-yer eğrisindeki kökler, o noktadaki K değeri için kapalı döngü kutuptur.)

4) $(s^2+3s+2)Y = 5U \quad \rightarrow \quad \ddot{y}+3\dot{y}+2y = 5u$

$x_1 = y$, $\quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$. Ana denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + 5u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\, x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm: 1. Yol: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -5 \\ 7 & \lambda+9 \end{vmatrix} = \lambda^2+6\lambda+8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,, \ \lambda_2 = -4\,.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$
$$e^{-4t} = c_0 + c_1 \cdot (-4)$$

$c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$ ve $c_0 = 2e^{-2t} - e^{-4t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (2e^{-2t} - e^{-4t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At} = I$.

2. yol: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s-3 & -5 \\ 7 & s+9 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix} s+9 & 5 \\ -7 & s-3 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{7/2}{s+2} - \dfrac{5/2}{s+4} & \dfrac{5/2}{s+2} - \dfrac{5/2}{s+4} \\ \dfrac{-7/2}{s+2} + \dfrac{7/2}{s+4} & \dfrac{-5/2}{s+2} + \dfrac{7/2}{s+4} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} & 2{,}5e^{-2t} - 2{,}5e^{-4t} \\ -3{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} & -2{,}5e^{-2t} + 3{,}5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
28.01.2015 Süre: 75 dakika

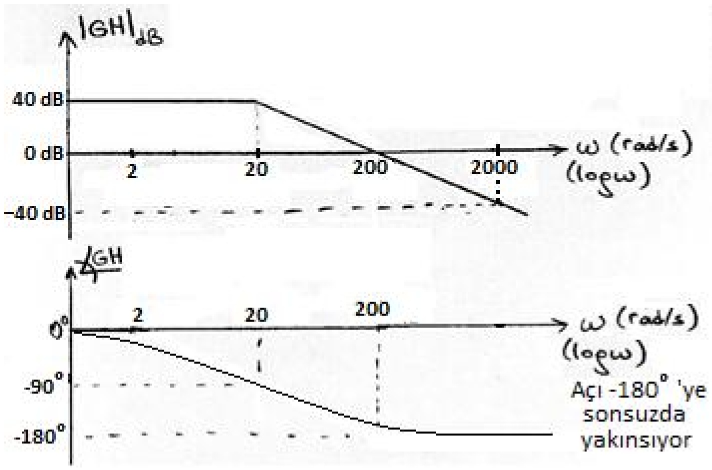
Yalnızca 4 soru çözmeniz beklenmektedir. 5 soruyla uğraşırsanız, en düşük puanlı cevabınız sayılmayacaktır.

1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2 + 5s - 2)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2) Bir sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna ilişkin Bode genlik(dB) eğrisi doğrusallaştırılmış parçalar halinde ve açı eğrisi yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir. Karmaşık açık döngü kutup veya sıfır yoktur.

a) Sistemin açık döngü transfer fonksiyonunu (GH) bulunuz. **(18 puan)**

b) Sistemin kararlı olup olmadığını, grafiklerden nasıl anlaşıldığını belirterek söyleyiniz. **(7 puan)**



3) Açık döngü transfer fonksiyonu $GH = \frac{K}{s(s+6)}$ olan sistemin kapalı döngü kutuplarının, K'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisini çiziniz. Sönüm oranı $\xi = 0,5$ isteniyorsa kökler ne olur? Bu kökler için K ne olur? **(25 puan)**

4) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{4}{s^2 + 7s + 12}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

5) $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

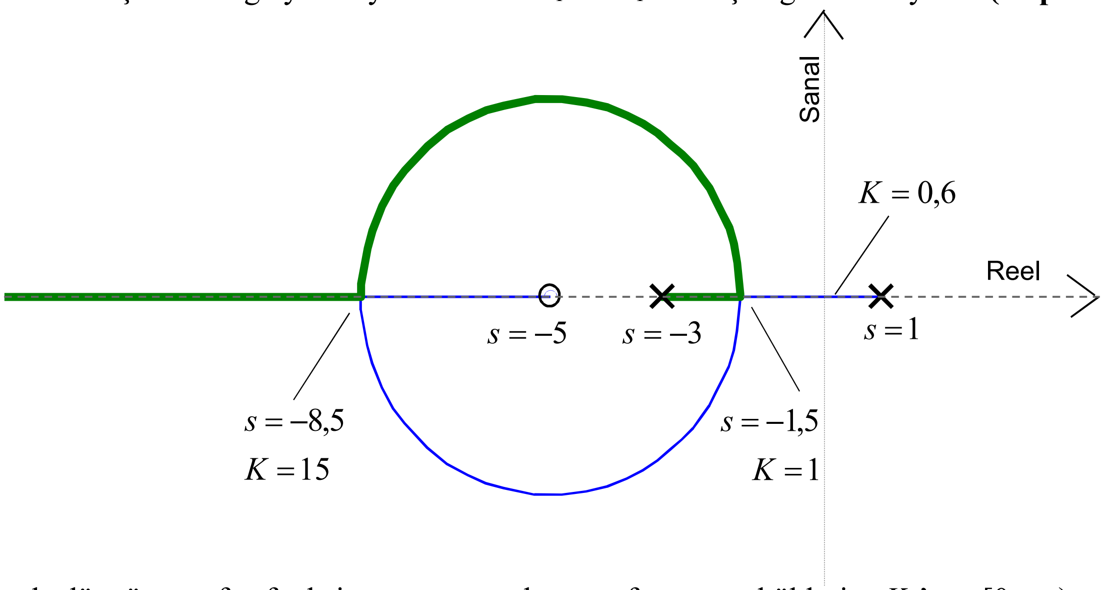
BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI
06.01.2016 Süre: 75 dakika

Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.

1) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+3s-6)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2)



Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıdaki şekilde verilmiştir. Köklerden biri kalın düz, diğeri ince düz, reel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda K 'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

c) En sağdaki kapalı döngü kutbun veya kutup çiftinin mümkün olduğunca solda olmasını istiyorsak K ne seçilmelidir ve bu seçim için en sağdaki kapalı döngü kutup(lar) ne olur? **(10 puan)**

3) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{2}{s^2+3s+5}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

4) $A=\begin{bmatrix}-8 & -6\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

5) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$, $y=\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}}_{C}x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -8 ve -10 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u girişi ne olmalıdır? **(25 puan)**

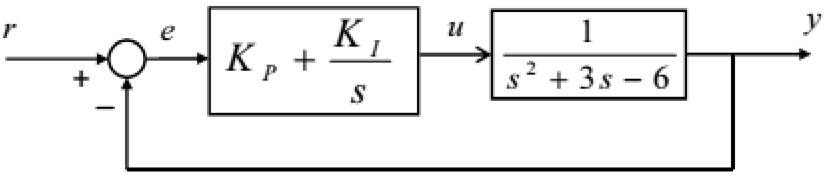
Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11}\neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r=\dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$

(α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
06.01.2016

1)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ ve birim geribeslemeli olduğundan, bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+3s-6)}}{1 + \dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+3s-6)} \cdot 1} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 3s^2 + (K_P - 6)s + K_I}$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 6)$	0
s^2	3	K_I	0
s^1	$K_P - 6 - (K_I/3)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P - 6 - (K_I/3) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 3K_P - 18$ olmalıdır. Meselâ, $K_P = 8$, $K_I = 4$ olabilir.

2) a) x ile işaretli olanlar açık döngü kutup, o ile işaretli olan açık döngü sıfırdır. Açık döngü kutuplarda $K = 0$, açık döngü sıfırlarda ise $K = +\infty$ 'dur. Yani,

$s = 1$'de ve $s = -3$ 'te açık döngü kutup olup $K = 0$,

$s = -5$ 'te açık döngü sıfır olup $K = +\infty$.

b) $K = 0$ 'dan itibaren artırılırken, kapalı döngü kutupların (köklerin) biri $s = 1$'de, diğeri ve $s = -3$ 'te yer almaya başlar, K arttıkça birbirine yaklaşırlar. $K > 0{,}6$ olduğunda sağdaki kök sol yarı bölgeye geçer. $K > 0{,}6$ için her iki kök de sol yarı bölgede olduğundan ve başka kök (kapalı döngü kutup) olmadığından sistem kararlıdır ve aksi halde kararsızdır. Yani kararlılık için $K > 0{,}6$ olmalıdır ve bu yeterlidir.

c) Az önce birbirine yaklaştığından bahsettiğimiz iki kök, $K = 1$ olunca $s = -1{,}5$ 'te birleşirler ve K daha da artırılınca karmaşık eşlenik çift olarak birbirinden ayrılırlar. K daha da artırılınca çember üzerinde ilerleyerek $K = 15$ olunca tekrar birleşirler. K daha da artırılınca bu kez reel eksen üzerinde biri sağa, biri sola doğru ayrılırlar. Buna göre en sağdaki kapalı döngü kutbun, yani kökün, en solda olduğu durum, $K = 15$ ikendir ve her iki kök de $s_1 = s_2 = -8{,}5$ olur.

3) Sayısız farklı biçimde model elde edilebilir. Başlıca yollardan ikisini verelim.

<u>1. yol:</u> Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+5} U(s) \quad , \qquad X_2(s) = sX_1(s)$$

Buna göre $s^2 X_1(s) + 3sX_1(s) + 5X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse $sX_2(s) + 3X_2(s) + 5X_1(s) = U(s)$.

Ayrıca çıkış $Y(s) = 2X_1(s)$ olur. İkinci ve son iki denklemleri sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1$, $\dot{x}_2 + 3x_2 + 5x_1 = u$, $y = 2x_1$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x \qquad (D = 0)$$

2. yol: Gözleyici kanonik biçim için transfer fonksiyondan giriş-çıkış diferansiyel denklemini yazalım:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 2u$$

$x_2 = y$,

$x_1 = \dot{x}_2 + 3y \qquad (= \dot{y} + 3y)$,

$0 = \dot{x}_1 + 5y - 2u$

Son iki denklemden $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ çekilerek ve $y = x_2$ yazılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki giriş ve çıkış hariç semboller, diğer yoldakinden farklı tanımlanmıştır.

4) 1. yol: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 8 & 6 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -5\,.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$
$$e^{-5t} = c_0 + c_1 \cdot (-5)$$

Bu iki denklemin farkı $e^{-2t} - e^{-5t} = 3c_1$ olduğundan $c_1 = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$c_0 = e^{-2t} + 2c_1$ olduğundan $c_0 = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \left(\frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & 2e^{-2t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At} = I$ olduğunu görebiliriz.

2. yol: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s + 8 & 6 \\ -3 & s - 1 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 7s + 10 = (s + 2)(s + 5)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2)(s + 5)}\begin{bmatrix} s - 1 & -6 \\ 3 & s + 8 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı ama sınavda gösterilmesi istenir.)

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{s+2}+\dfrac{2}{s+5} & \dfrac{-2}{s+2}+\dfrac{2}{s+5}\\ \dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+5} & \dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+5}\end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At}=\begin{bmatrix}-e^{-2t}+2e^{-5t} & -2e^{-2t}+2e^{-5t}\\ e^{-2t}-e^{-5t} & 2e^{-2t}-e^{-5t}\end{bmatrix}$$

5) Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda+8)(\lambda+10)=\lambda^2+18\lambda+80$

$k_1=80-1=\boxed{k_1=79}$

$k_2=18-2=\boxed{k_2=16}$

Sağlaması: $A-BK=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}79 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1-79 & -2-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -80 & -18\end{bmatrix}=A_c$

$$\det(\lambda I-A_c)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 80 & \lambda+18\end{vmatrix}=\lambda^2+18\lambda+80 \checkmark$$

$\alpha_0=80$ $\qquad K_r=\dfrac{\alpha_0}{C_{11}}=\dfrac{80}{4}=\boxed{K_r=20}$

Sonuç: $u=-Kx+K_r y^*=\boxed{u=-79x_1-16x_2+20y^*}$ olmalıdır**.**

Makine Mühendisliği Bölümü

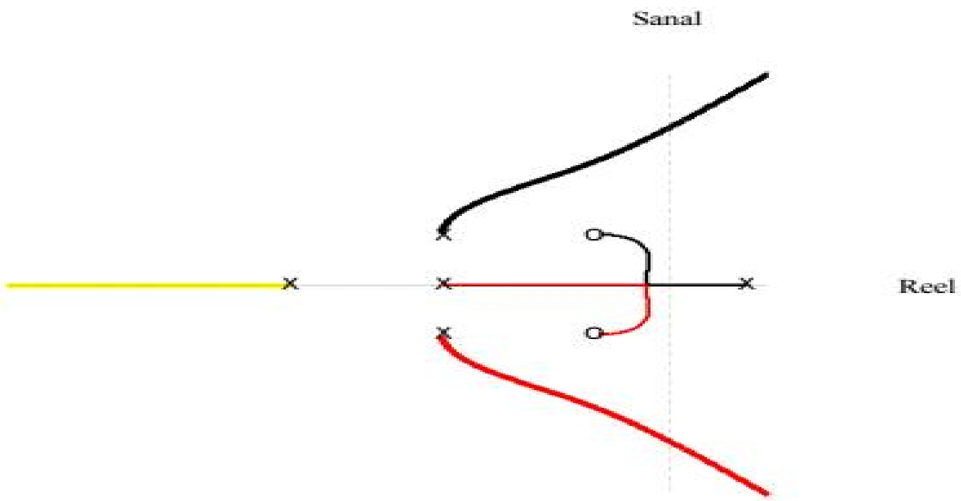
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

27.01.2016 Süre: 75 dakika

Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.

1) Transfer fonksiyonu $2/(s^2+4s-9)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız. **(25 puan)**

2)



Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi yukarıdaki şekilde verilmiştir. Her bir kök farklı renk veya kalınlıkta düz çizgiyle, reel ve sanal eksenler ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir.

a) Açık döngü sıfır ve açık döngü kutupların değerlerini ve kök-yer eğrisinde bu noktalarda K 'nın değerlerini belirtiniz. **(7 puan)**

b) K 'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? **(8 puan)**

3) Transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{6s}{s^2+2s+4}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz. **(25 puan)**

4) $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz. **(25 puan)**

5) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}}_{C} x$$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, her iki özdeğeri de -10 olacak şekilde yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u girişi ne olmalıdır? **(25 puan)**

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$

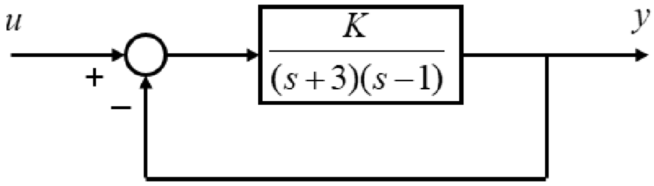
(α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI SORULARI
05.01.2018 Süre: 75 dakika

Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.

1) Aşağıdaki şekildeki sistemin kök-yer eğrisini (K 'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre kapalı döngü köklerin yerlerini gösteren eğrisini) çiziniz. Sistem K 'nın hangi değer bölgesi için kararlıdır? (Son kısmı istediğiniz yolla yapabilirsiniz.)



2) Transfer fonksiyonu $1/(s^2+s-3)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız.

3) $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz.

---

4. ve 5. sorular, giriş (u) – çıkış (y) ilişkisi $\ddot{y}+2\dot{y}+3y=4\dot{u}+5u$ diferansiyel denklemiyle verilen sistem içindir.

4) Sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -8 ve -6 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u girişi ne olmalıdır?

(*Yol gösterme:* Önce sistemin durum uzayı gösterimini **denetleyici** kanonik biçimde elde etmeniz tavsiye edilir.)

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}}}$

(α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

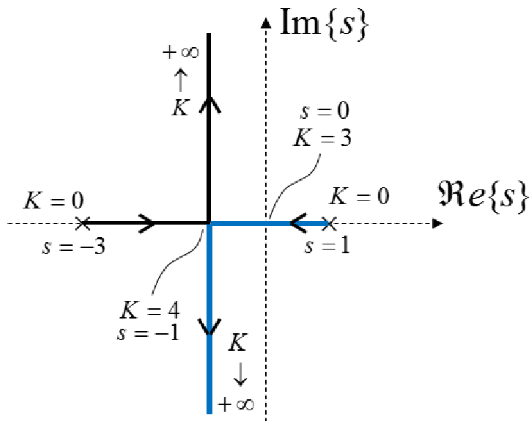
5) Sistemin durum uzayı gösterimini **gözleyici** kanonik biçimde elde ediniz. Sonra da bu biçimin x durum değişkenini tahmin eden gözleyiciyi, tahmin yakınsaması -8 ve -6 özdeğerleriyle olacak şekilde tasarlayıp (gözleyici kazanç matrisini bulup) matris diferansiyel denklemi şeklinde yazınız.

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI
05.01.2018

1) $H=1,\ GH=\frac{K}{(s+3)(s-1)}=-1$ Açık döngü kutuplar 2 adet (+1 ve –3'te), açık döngü sıfır yok. Asimptotlar $180°/(2-0)=90°$ 'nin tek katları (±90°) yönlerinde. Asimptotların reel eksende kesişim noktası $=\frac{1+(-3)}{2}=-1$. Bu aynı zamanda ayrılma noktasıdır: Çünkü $K=-(s+3)(s-1)$

$\rightarrow\ \frac{dK}{ds}=-(s-1)-(s+3)=-2s-2=0\ \Rightarrow\ s=-1$ ve bu noktada $K=-(-1+3)(-1-1)=4$ bulunur. Yandaki şekilde reel ve sanal eksenler kesikli çizgilerle, köklerden biri siyah diğeri mavi kalın düz çizgilerle gösterilmiştir. Oklar K'nın artış yönleridir.

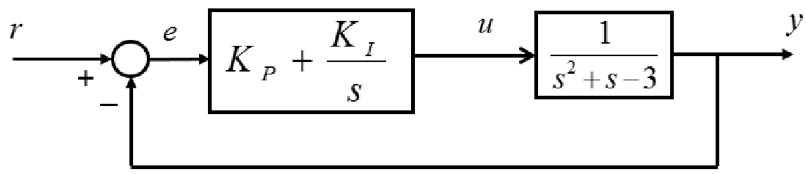


Bunlar istenirse şöyle de bulunabilirdi: $s^2+2s+(K-3)=0$

$s=\frac{-2\mp\sqrt{4-4(K-3)}}{2}=-1\mp\sqrt{4-K}$ Eğer $K>4$ ise kökler karmaşık olur: $s=-1\mp j\sqrt{K-4}$

Köklerden birinin sağ yarı bölgeden sol yarı bölgeye girdiği nokta burada orijin olduğu için $s=0$ yazılarak $K=-(0+3)(0-1)=3$ bulunur. Dolayısıyla $K>3$ için bütün köklerin sol yarı bölgede, yani sistemin kararlı olacağı anlaşılır.

2)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P+\frac{K_I}{s}=\frac{K_Ps+K_I}{s}$ ve birim geribeslemeli $(H=1)$ olduğundan $GH=\frac{K_Ps+K_I}{s(s^2+s-3)}\cdot 1$. Kapalı döngü kutupları veren denklem ise

$$1+GH=1+\frac{K_Ps+K_I}{s^3+s^2-3s}=0\ \ \rightsquigarrow\ \ s^3+s^2+(K_P-3)s+K_I=0$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer (⟺) tüm sistemin (kapalı döngü) kutupları sol yarı bölgede ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	(K_P-3)	0
s^2	1	K_I	0
s^1	K_P-3-K_I	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I>0$ ve $K_P-3-K_I>0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0<K_I<K_P-3$ olmalıdır. Meselâ, $K_P=6$, $K_I=2$ olabilir.

3) <u>1. yol:</u> $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & 2\\ 1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+7\lambda+10=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=-2\,,\ \lambda_2=-5\,.$

$$e^{-2t}=c_0+c_1\cdot(-2)$$
$$e^{-5t}=c_0+c_1\cdot(-5)$$

Bu iki denklemin farkı $e^{-2t} - e^{-5t} = 3c_1$ olduğundan $c_1 = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$c_0 = e^{-2t} + 2c_1$ olduğundan $c_0 = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \left(\frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}\right)\begin{bmatrix}-4 & -2\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t}\\ -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}\end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At} = I$ olduğunu görebiliriz.

<u>2. yol:</u> $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix}s+4 & 2\\1 & s+3\end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 7s + 10 = (s+2)(s+5)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+5)}\begin{bmatrix}s+3 & -2\\-1 & s+4\end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı ama sınavda gösterilmesi istenir.)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1/3}{s+2} + \frac{2/3}{s+5} & \frac{-2/3}{s+2} + \frac{2/3}{s+5}\\ \frac{-1/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5} & \frac{2/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5}\end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t}\\ -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}\end{bmatrix}$$

4) Sistemin transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s+5}{s^2+2s+3}$ yani $Y(s) = \frac{4s+5}{s^2+2s+3}U(s)$

Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}U(s) \quad , \qquad X_2(s) = sX_1(s)$$

Buna göre $s^2X_1(s) + 2sX_1(s) + 3X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse $sX_2(s) + 2X_2(s) + 3X_1(s) = U(s)$.

Ayrıca çıkış $Y(s) = 4sX_1(s) + 5X_1(s) = 4X_2(s) + 5X_1(s) = Y(s)$ olur. $X_2(s)$, $U(s)$ ve $Y(s)$ denklemlerinin son hallerini sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1 \quad , \quad \dot{x}_2 + 2x_2 + 3x_1 = u \quad , \quad y = 5x_1 + 4x_2$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix}}_{C}x \qquad (\ D = 0\ )$$

İstenen denetim özdeğerleri için karakteristik polinom: $(\lambda+8)(\lambda+6) = \lambda^2 + 14\lambda + 48$

$k_1 = 48-3 = \boxed{k_1 = 45}$

$k_2 = 14-2 = \boxed{k_2 = 12}$

Sağlaması: $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3-45 & -2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -48 & -14 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 48 & \lambda+14 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 14\lambda + 48 \ \checkmark$$

$\alpha_0 = 48$ $\qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \boxed{K_r = \dfrac{48}{5}}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -45x_1 - 12x_2 + \dfrac{48}{5} y^*}$ olmalıdır.

5) Gözleyici kanonik biçim için giriş-çıkış diferansiyel denkleminden faydalanalım:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 4\dot{u} + 5u$$

$x_2 = y$,

$x_1 = \dot{x}_2 + 2y - 4u \qquad (= \dot{y} + 2y - 4u)$,

$0 = \dot{x}_1 + 3y - 5u \qquad (= \ddot{y} + 2\dot{y} - 4\dot{u} + 3y - 5u)$

Son iki denklemden $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ çekilerek ve $y = x_2$ yazılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad\qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki giriş ve çıkış hariç semboller, 4. sorudakinden farklıdır.

İstenen gözleyici özdeğerleri için karakteristik polinom: $(\lambda+8)(\lambda+6) = \lambda^2 + 14\lambda + 48$

$l_1 = 48-3 = \boxed{l_1 = 45}$

$l_2 = 14-2 = \boxed{l_2 = 12}$

Yani gözleyici diferansiyel denklemi: $\quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \begin{bmatrix} 45 \\ 12 \end{bmatrix}(y - \underbrace{C\hat{x}}_{\hat{x}_2})$

olup burada $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ şeklinde iki boyutludur. $\hat{x}$ ’nın başlangıç değeri ise keyfidir.

Sağlaması: $A - LC = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 45 \\ 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3-45 \\ 1 & -2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -48 \\ 1 & -14 \end{bmatrix} = A_o$

$$\det(\lambda I - A_o) = \begin{vmatrix} \lambda & 48 \\ -1 & \lambda+14 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 14\lambda + 48 \ \checkmark$$

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
15.01.2018 Süre: 75 dakika

Sorulardan istediğiniz 4 tanesini cevaplayınız. Fazla cevaplarsanız en iyi dördü dikkate alınır.

1) a) Açık döngü transfer fonksiyonu $G(s)H(s) = \dfrac{K(s-4)}{s+2}$ olan negatif geribeslemeli sistemin kök-yer eğrisini çiziniz. **(9 puan)**

b) K 'nın hangi değer bölgesi için sistemin kararlı olduğunu istediğiniz yolla bulunuz. **(6 puan)**

c) Küçük bir çocuk topu yakalamak için topu gördüğü yöne koşar. Biraz büyüyünce ise kendisi topa hangi noktada yetişebileceğini düşünüyorsa o noktaya koşar. Çocukta gelişen bu kontrol yeteneği, P, I, D kontrollerinden hangisi sayılabilir? Belirttiğiniz harfin açık anlamını da yazarak nedeninin kısaca söyleyiniz. **(10 puan)**

2) Transfer fonksiyonu $6/(s^2+6s-12)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız.

3) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini istediğiniz yolla bulunuz.

4) Giriş (u) – çıkış (y) ilişkisi $\ddot{y} - 3\dot{y} + 5y = 2\dot{u} - 4u$ diferansiyel denklemiyle verilen sistemi,

a) Denetleyici kanonik biçimde durum uzayı gösterimini elde ediniz. **(13 puan)**

b) y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, iki katlı **-5** özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u girişi ne olmalıdır? **(12 puan)**

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla, $\boxed{K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$

(α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

5) Giriş (u) – çıkış (y) ilişkisi $\ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = 5\dot{u} - 3u$ diferansiyel denklemiyle verilen sistemi,

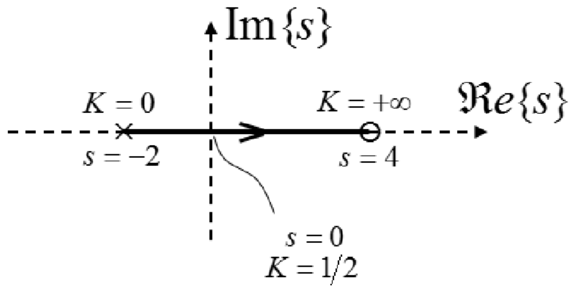
a) Gözleyici kanonik biçimde durum uzayı gösterimini elde ediniz. **(13 puan)**

b) Bu biçimin x durum değişkenini tahmin eden gözleyiciyi, tahmin yakınsaması **-7** ve **-8** özdeğerleriyle olacak şekilde tasarlayıp (gözleyici kazanç matrisini bulup) matris diferansiyel denklemi şeklinde yazınız. **(12 puan)**

BAŞARILAR … **Yard. Doç. Dr. Ata SEVİNÇ**

Makine Mühendisliği Bölümü
SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI
15.01.2018

1) a) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s-4)}{s+2}=-1$ köklerinin K 'ya göre değişimi.



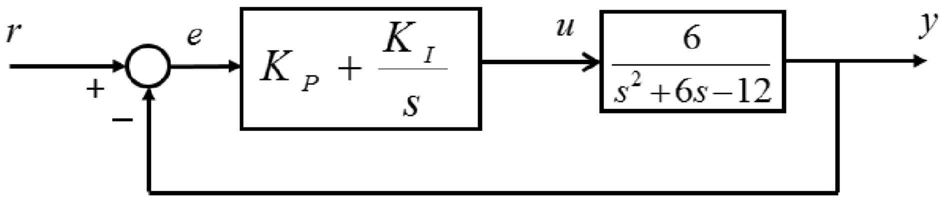
Burada $s=+4$'te bir açık döngü (a.d.) sıfır, $s=-2$'de de bir a.d. kutup vardır. Kök sayısı a.d. kutup sayısı kadardır, yani 1 adet. A.d. kutup ve a.d. sıfır adedi eşit olduğu için asimptot yoktur. Reel eksende, sağındaki a.d. kutup ve a.d. sıfır toplam adedi tek sayı olan $(-2<s<+4)$ bölge kök-yer eğrisi parçasıdır. $K=0$ iken a.d. kutupta olan kök, $K\to+\infty$'a doğru artarken a.d. sıfıra doğru yaklaşır.

b) $s=0$ iken $G(0)H(0)=\dfrac{K(0-4)}{0+2}=-1$ denkleminden $K=1/2$ bulunur. Daha küçük K değerleri için sanal eksen ve sağ tarafta kök olmadığı için sistem kararlıdır. Kısaca sistem $0\le K<1/2$ için kararlıdır.

(Aslında kararlılık bölgesi $-1<K<1/2$ 'dir ama negatif K değerleri kök-yer eğrisi ilgi alanında değildir.)

c) D = türevsel (*derivative*) kontrol sayılabilir. Çünkü çocuk artık hatadaki (hedef ile mevcut konum arasındaki farktaki) değişimleri de dikkate alan hesap ile hareketlerini kontrol etmektedir. Öncekinden farklı olarak çocukta gelişen bu yönteme, verilen seçeneklerdeki yöntemlerin en yakını türevsel kontroldür. Çünkü anlık değişim, türev alınarak hesaba katılır.

2)



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P+\frac{K_I}{s}=\frac{K_Ps+K_I}{s}$ ve birim geribeslemeli $(H=1)$ olduğundan $GH=\frac{(K_Ps+K_I)\cdot 6}{s(s^2+6s-12)}\cdot 1$. Kapalı döngü kutupları veren denklem ise

$$1+GH=1+\frac{6K_Ps+6K_I}{s^3+6s^2-12s}=0 \quad \rightsquigarrow \quad s^3+6s^2+(6K_P-12)s+6K_I=0$$

Hatanın (e) hep sıfıra gitmesi ancak ve eğer (⟺) tüm sistemin (kapalı döngü) kutupları sol yarı bölgede ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(6K_P-12)$	0
s^2	6	$6K_I$	0
s^1	$6K_P-12-\dfrac{6K_I\cdot 1}{6}$	0	
s^0	$6K_I$		

Kararlılık için **ilk sütunda** işaret değişikliği olmamalıdır.
Yani $6K_I>0$ ve $6K_P-12-K_I>0$ olmalıdır.
Özetle $0<K_I<6K_P-12$ olmalıdır.
Meselâ, $K_P=3$, $K_I=1$ olabilir.

3) <u>1. yol:</u> $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 2 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -3\,.$

$$e^{-2t} = c_0 + c_1 \cdot (-2)$$
$$e^{-3t} = c_0 + c_1 \cdot (-3)$$

Bu iki denklemin farkından $c_1 = e^{-2t} - e^{-3t}$ bulunur.

$c_0 = e^{-2t} + 2c_1$ olduğundan $c_0 = e^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$ yani $c_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-2t} - e^{-3t})\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması olarak, $t = 0$ için $e^{At} = I$ olduğunu görebiliriz.

<u>2. yol:</u> $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ $\qquad sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı ama sınavda gösterilmesi istenir.)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3} \\ \dfrac{-2}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} & \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

4) Sistemin transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s-4}{s^2-3s+5}$ yani $Y(s) = \frac{2s-4}{s^2-3s+5}U(s)$

Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2-3s+5}U(s) \quad , \qquad X_2(s) = sX_1(s)$$

Buna göre $s^2X_1(s) - 3sX_1(s) + 5X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse $sX_2(s) - 3X_2(s) + 5X_1(s) = U(s)$.

Ayrıca çıkış $Y(s) = 2sX_1(s) - 4X_1(s) = 2X_2(s) - 4X_1(s) = Y(s)$ olur. $X_2(s)$, $U(s)$ ve $Y(s)$ denklemlerinin son hallerini sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1 \quad , \quad \dot{x}_2 - 3x_2 + 5x_1 = u \quad , \quad y = -4x_1 + 2x_2$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix}}_{C}x \qquad (\ D = 0\ )$$

İstenen denetim özdeğerleri için karakteristik polinom: $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = (\lambda+5)(\lambda+5) = \lambda^2 + 10\lambda + 25$

$k_1 = \alpha_0 - a_0 = 25 - 5 = \boxed{k_1 = 20}$ (Dikkat, $-a_0 = -5$)

$k_2 = \alpha_1 - a_1 = 10 + 3 = \boxed{k_2 = 13}$ (Dikkat, $-a_1 = 3$)

Yani $K = [k_1 \quad k_2] = [20 \quad 13]$

Sağlaması: $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [20 \quad 13] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5-20 & 3-13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 25 & \lambda + 10 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 25 \ \checkmark$$

$\alpha_0 = 25$, $C_{11} = -4$ $\qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \boxed{K_r = -\dfrac{25}{4}}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -20x_1 - 13x_2 - \dfrac{25}{4} y^*}$ olmalıdır**.**

5) $\ddot{y} + 4\dot{y} - 6y = 5\dot{u} - 3u$

$x_2 = y$,

$x_1 = \dot{x}_2 + 4y - 5u \qquad (= \dot{y} + 4y - 5u)$,

$0 = \dot{x}_1 - 6y + 3u \qquad (= \ddot{y} + 4\dot{y} - 5\dot{u} - 6y + 3u)$

Son iki denklemden $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ çekilerek ve $y = x_2$ yazılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{[0 \quad 1]}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur.

İstenen gözleyici özdeğerleri için karakteristik polinom: $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = (\lambda + 7)(\lambda + 8) = \lambda^2 + 15\lambda + 56$

$l_1 = \alpha_0 - a_0 = 56 + 6 = \boxed{l_1 = 62}$ (Dikkat, $-a_0 = 6$)

$l_2 = \alpha_1 - a_1 = 15 - 4 = \boxed{l_2 = 11}$ (Dikkat, $-a_1 = -4$)

Yani gözleyici kazancı $L = \begin{bmatrix} 62 \\ 11 \end{bmatrix}$ ve gözleyici diferansiyel denklemi: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \begin{bmatrix} 62 \\ 11 \end{bmatrix} (y - \underbrace{C\hat{x}}_{\hat{x}_2})$

Burada $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ ve bunun da başlangıç değeri keyfidir.

Sağlaması: $A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 62 \\ 11 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 6-62 \\ 1 & -4-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -56 \\ 1 & -15 \end{bmatrix} = A_o$

$$\det(\lambda I - A_o) = \begin{vmatrix} \lambda & 56 \\ -1 & \lambda + 15 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 15\lambda + 56 \ \checkmark$$