SİSTEM MODELLEME VE OTOMATİK KONTROL

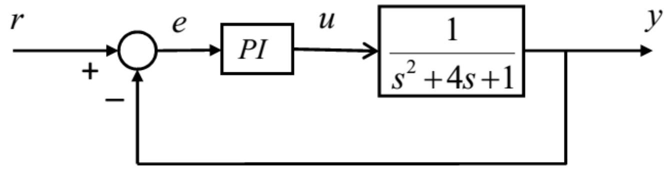
FİNAL/BÜTÜNLEME SORU ÖRNEKLERİ

1.Grup:

Vize soru örneklerindeki son grup (Routh-Hurwitz testi) sorular dahildir. Bunlar PID sorularıyla birlikte de sorulabilir.

1.1) Transfer fonksiyonu $1/\left(s^2+4s+1\right)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u değerini PI kontrol ile uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PI kazançları K_P ve K_I hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P ve K_I kazanç değerleri atayınız.

Çözüm:



PI kontrolörün (denetleyicinin) transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+4s+1)}}{1+\dfrac{K_P s + K_I}{s(s^2+4s+1)}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3+4s^2+(1+K_P)s+K_I}$$

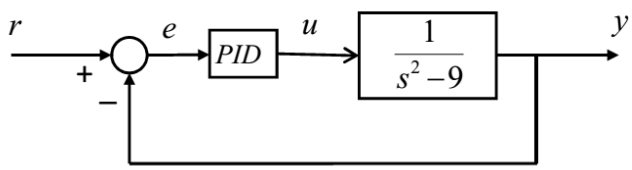
Hatanın (e) sıfıra gitmesi ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) tüm sistem kararlı ise olur. Bütün sistemin transfer fonksiyonunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P + 1)$	0
s^2	4	K_I	0
s^1	$K_P + 1 - (K_I/4)$	0	
s^0	K_I		

Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$ ve $K_P + 1 - (K_I/4) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle $0 < K_I < 4K_P + 4$ olmalıdır.
Meselâ, $K_P = 1$, $K_I = 3$ olabilir.

1.2) Transfer fonksiyonu $1/\left(s^2-9\right)$ olan bir sistemin çıkışını, istenen r değerine getirmek için gereken u sinyalini PID kontrol ile hesaplayıp uygulamak için gereken düzenlemeyi blok şema ile gösteriniz. PID kazançları K_P , K_I ve K_D hangi şartları sağlamalıdır? Bu şartları sağlayan keyfi bir takım K_P , K_I ve K_D kazanç değerleri atayınız.

Çözüm:



PID denetleyicinin transfer fonksiyonu $K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$ olup bütün sistemin transfer fonksiyonu:

$$\frac{\dfrac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(s^2-9)}}{1 + \dfrac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(s^2-9)}} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + K_D s^2 + (K_P - 9)s + K_I}$$

Bunun paydasına Routh-Hurwitz testi uygulayarak kararlılık şartlarını bulalım:

s^3	1	$(K_P - 9)$	0
s^2	K_D	K_I	0
s^1	$K_P - 9 - (K_I/K_D)$	0	
s^0	K_I		

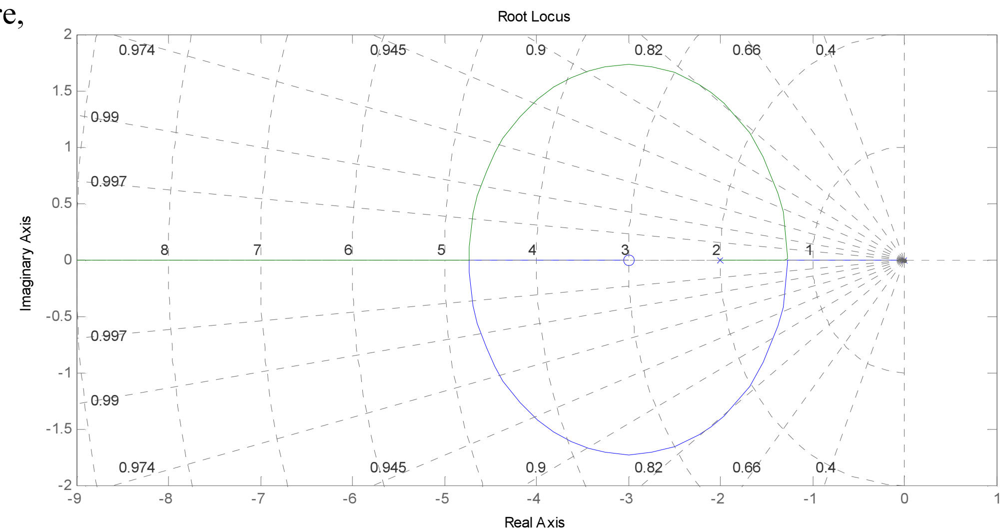
Kararlılık için ilk sütunda işaret değişikliği olmamalıdır. Yani
$K_I > 0$, $K_D > 0$ ve $K_P - 9 - (K_I/K_D) > 0$ olmalıdır. Diğer bir ifadeyle

$K_D > 0$ ve $0 < K_I < (K_D K_P - 9K_D)$ olmalıdır. Meselâ, $K_D = 1$, $K_P = 12$, $K_I = 2$ olabilir.

2. Grup:

2.1) Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi Şekil 2.1'de verilmiştir. Buna göre,

Şekil 2.1



a) Sistem K'nın negatif olmayan hangi değer aralığında kararlıdır?

b) Sönüm oranı $\xi = 0{,}9$ isteniyorsa kökler ne olur?

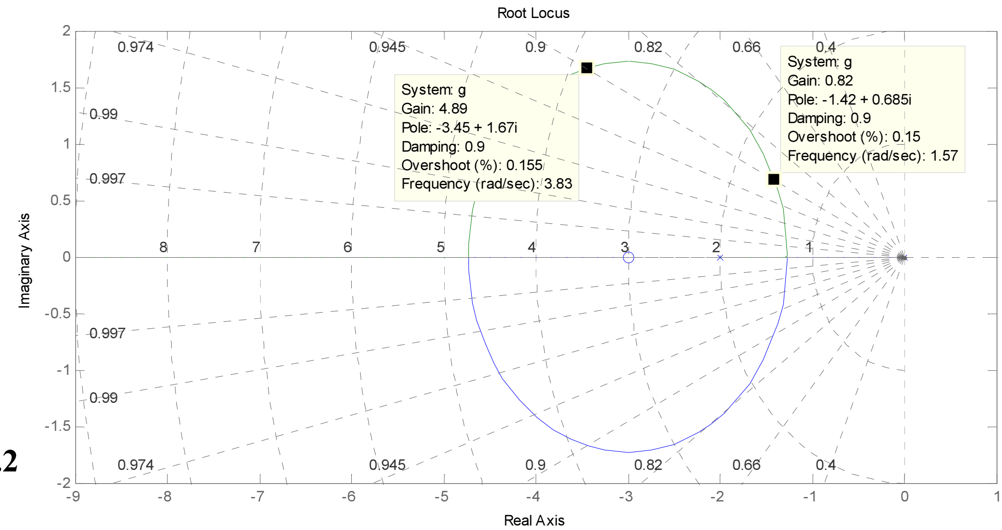
Çözüm: **a)** Kök yer eğrisinin bir noktası hariç hepsi sol yarı bölgededir. Hariç olan nokta, × ile gösterilen açık döngü kutup olup, burada K=0'dır. Bunu hariç tutarak $K > 0$ için sistemin kararlı olduğu anlaşılır.

b) $\xi = \cos\phi$ olup, ϕ, karmaşık köklerin negatif reel eksenle yapılan açıdır. $\xi = 0{,}9$ için,

$\phi = \cos^{-1}0{,}9$'dur. Şekil 2.1'deki açısal bölmeler eşit olmayıp, gösterilen cos değerlerini (sönüm oranlarını) veren açılardır. Şekil 2.2'de gösterildiği gibi bu açıya karşılık gelen ve orijinden geçen çizginin kök-yer eğrisini kestiği nokta(lar) bulunur. Burada iki ayrı çözüm vardır. Her biri için kök değerinin eşleniği de vardır. 1. çözümde kutuplar yaklaşık $p_{1,2} = -1{,}42 \pm j0{,}685$ olur. 2. çözümde ise kutuplar yaklaşık $p_{1,2} = -3{,}45 \pm j1{,}67$ olur.

Dikkat: Burada sönüm oranının küçük bazı değerleri (büyük açılar) için kesişme olmayacağından çözüm yoktur.

Şekil 2.2



Dikkat: Burada açık döngü veya kapalı döngü transfer fonksiyon verilmediği için K değeri istenemez. Grafikte görülen K değeri, matlab programında transfer fonksiyon bilindiği için görülmektedir. Öğrenciden K değeri istenecekse transfer fonksiyon verilirdi. O zaman her bir çözümdeki eşlenik köklerden yalnız birisi s yerine yazılarak, ya açık döngü transfer fonksiyon -1'e eşitlenerek, ya da kapalı döngü transfer fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek K bulunurdu. Sıradaki sorudaki gibi.

2.2) Açık döngü transfer fonksiyonu $GH = \frac{K}{s(s+4)}$ olan sistemin kapalı döngü kutuplarının, K'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisini çiziniz. K'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? Sönüm oranı $\xi = 0{,}5$ isteniyorsa kökler ne olur? Bu kökler için K ne olur?

Çözüm: s = 0 ve s =-4'te birer kutup var. Sıfır yok. Reel eksen üzerinde sağ tarafındaki kutup ve sıfır sayısı toplamı tek sayıda olan kısımlar kök-yer eğrisindendir. Burada 0 ile -4 arası.

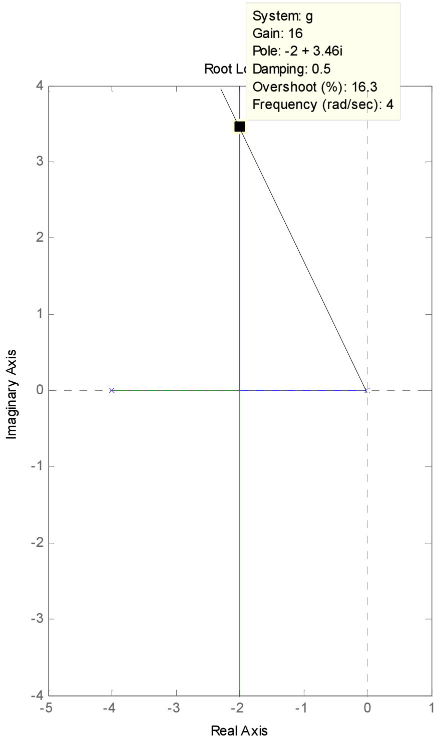
Dolayısıyla iki kutup arasında bir ayrılma noktası var. GH = -1'den $K = -s^2 - 4s$

$$\rightarrow \quad s^2 + 4s + K = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -2 \mp \sqrt{4 - K}$$

Yani ayrılma noktasında K = 4 ve s = -2 ve K > 4 için köklerin reel kısmı hep -2. Böylece Şekil 2.3 çizilir.

Kök yer eğrisinin bir noktası hariç hepsi sol yarı bölgededir. Hariç olan nokta, × ile gösterilen açık döngü kutup olup, burada K = 0'dır. Bunu hariç tutarak K > 0 için sistemin kararlı olduğu anlaşılır.

Sönüm oranı ξ = 0,5 = cosϕ olduğundan, ϕ = 60°. Negatif reel eksenle 60° yapan ve orijinden geçen doğrunun kök-yer eğrisini kesiştiği s noktası ve eşleniğinden s_{12} = -2 ± j3,46 bulunur. Reel kısım hep -2 olduğu için sanal kısım ±2tan60° = ±3,46

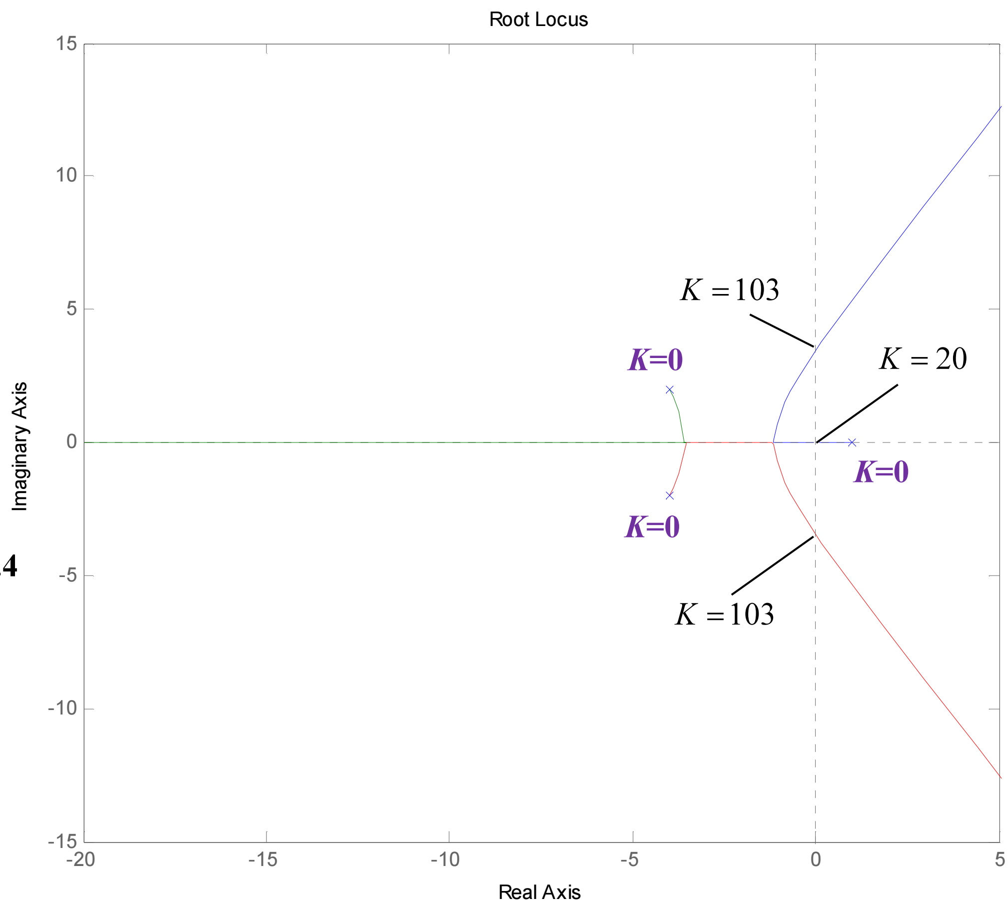


Şekil 2.3

diye de bulunabilirdi. Yani $\sqrt{K - 4}$ = 3,46 ve K = 16 bulunur.

Köklerden birini GH = -1'de yerine yazarak da K bulunabilirdi.

2.3)



Şekil 2.4

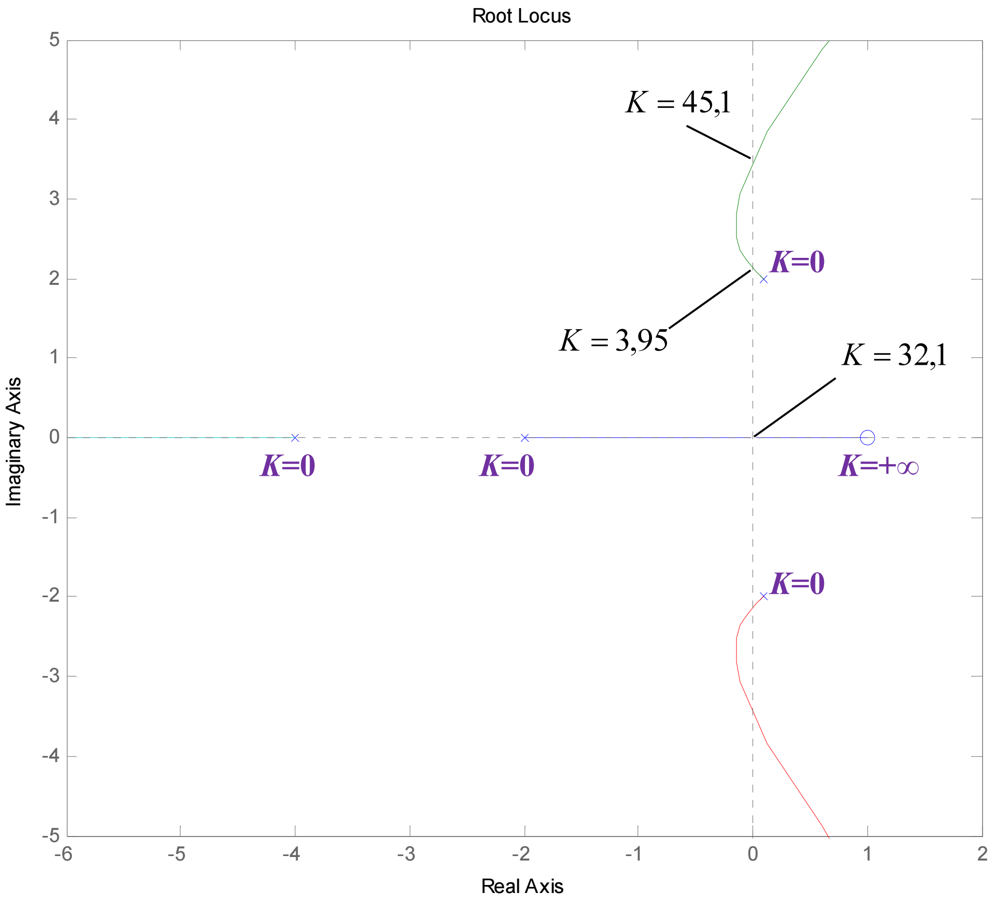
Bir sistemin kapalı döngü transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan köklerin, K'nın $[0,+\infty)$ aralığındaki değişimine göre yerlerini gösteren kök-yer eğrisi Şekil 2.4'te verilmiştir (Üç adet açık döngü kutup var, açık döngü sıfır yok). Özel bazı noktalarda K değerleri yaklaşık olarak verilmiştir. K'nın negatif olmayan hangi değerleri için sistem kararlıdır? Ayrıca $K = 0$ ve $K = +\infty$ noktalarını gösteriniz (Şekildeki mor yazılar soruda verilmiyor, cevabın parçası).

Çözüm: 20 veya daha küçük K değerleri için köklerden birisi, ve 103 veya daha büyük K değerleri için ise köklerden ikisi sanal eksen üzerinde ya da sağ yarı bölgede olmaktadır. Yani $K \leq 20$ veya $K \geq 103$ için sistem kararsızdır. Diğer bir ifadeyle $\{ K \mid K > 20 \} \cap \{ K \mid K < 103 \}$ kümesindeki herhangi bir K için sistem kararlıdır. Kısaca $20 < K < 103$ için sistem kararlıdır.

2.4) 3. Sorunun aynısını Şekil 2.5 için yapınız.

Çözüm: Köklerin eşlenikleri için de K'lar aynıdır. Reel köklerden birisi $K \geq 32.1$ için kararsız bölgededir (sağ yarı bölgede veya sanal eksende). Karmaşık iki kök ise $K \leq 3{,}95$ ve $K \geq 45{,}1$ için kararsız bölgededir. Buna göre $\{ K \mid 3{,}95 < K < 45{,}1 \} \cap \{ K \mid 0 < K < 32{,}1 \}$ kümesindeki herhangi bir K için sistem kararlıdır. Kısaca $3{,}95 < K < 32{,}1$ için sistem kararlıdır.

Şekil 2.5



3. Grup:

3.1) Giriş(u) – çıkış(y) ilişkisi $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 6\dot{u} - 3u$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz.

Çözüm:

Transfer fonksiyon: $\frac{Y(s)}{U(s)} = T(s) = \frac{6s-3}{s^3+2s^2+5s+4}$

<u>1. Yol:</u> Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$X_1(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+5s+4} U(s)$,

(*) $X_2(s) = sX_1(s)$, $X_3(s) = sX_2(s)$

Buna göre $s^3X_1(s) + 2s^2X_1(s) + 5sX_1(s) + 4X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse

(*) $sX_3(s) + 2X_3(s) + 5X_2(s) + 4X_1(s) = U(s)$. Ayrıca çıkış şöyle olur:

(*) $Y(s) = 6X_2(s) - 3X_1(s)$

Yıldızla gösterilen satırlardaki denklemleri sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1$, $x_3 = \dot{x}_2$, $\dot{x}_3 + 2x_3 + 5x_2 + 4x_1 = u$, $y = 6x_2 - 3x_1$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x \qquad (D = 0)$$

<u>2. yol:</u> Gözleyici kanonik biçim:

$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 6\dot{u} - 3u$

$x_3 = y$,

$x_2 = \dot{x}_3 + 2y = \dot{y} + 2y$,

$x_1 = \dot{x}_2 + 5y - 6u = \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y - 6u$

$0 = \dot{x}_1 + 4y + 3u$

Her bir denklemin soldaki eşitliğinden $\dot{x}_k$ çekilerek (k = 1,2,3) ve $y = x_3$ yazılarak,

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki x , diğer yoldakinden farklı tanımlanmıştır.

3.2) Transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2+5s+6}$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz.

Çözüm: $(s^2 + 5s + 6)Y = 4U \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 4u$

u 'nun türevi yoksa tam olarak kanonik biçim kullanmadan durum değişkenleri basitçe şöyle tanımlanabilir:

$x_1 = y$, $\quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$. Ana denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{x}_2 = -5x_2 - 6x_1 + 4u$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

3.3) Giriş(u) – çıkış(y) ilişkisi $\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = \dot{u} + 4u$ ile verilen sistem için uygun durum değişkenleri tanımlayarak bir durum uzayı modeli elde ediniz.

Çözüm:

Transfer fonksiyon: $\frac{Y(s)}{U(s)} = T(s) = \frac{s+4}{s^2+3s-2}$

<u>1. Yol:</u> Denetleyici kanonik biçimi için durum değişkenlerini s uzayında şöyle tanımlayalım:

$X_1(s) = \frac{1}{s^2+3s-2} U(s)$,

(*) $\quad X_2(s) = sX_1(s)$

Buna göre $\quad s^2X_1(s) + 3sX_1(s) - 2X_1(s) = U(s)$. Düzenlenirse

(*) $\quad sX_2(s) + 3X_2(s) - 2X_1(s) = U(s)$. Ayrıca çıkış şöyle olur:

(*) $\quad Y(s) = X_2(s) + 4X_1(s)$

Yıldızla gösterilen satırlardaki denklemleri sırasıyla zaman uzayında yazarsak:

$x_2 = \dot{x}_1 \quad , \quad \dot{x}_2 + 3x_2 - 2x_1 = u \quad , \quad y = x_2 + 4x_1$

Bunları matris biçiminde yazarak denetleyici kanonik biçimli durum uzayı modelini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \qquad (\ D = 0\ )$$

<u>2. yol:</u> Gözleyici kanonik biçim:

$\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = \dot{u} + 4u$

$x_2 = y \ ,$

$x_1 = \dot{x}_2 + 3y - u = \dot{y} + 3y - u \ ,$

$0 = \dot{x}_1 - 2y - 4u$

Her bir denklemin soldaki eşitliğinden $\dot{x}_k$ çekilerek (k = 1,2) ve $y = x_2$ yazılarak,

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

gözleyici kanonik biçimi bulunur. Buradaki x , diğer yoldakinden farklı tanımlanmıştır.

3.4) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm: <u>1. Yol:</u> $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -4\,.$

$$e^{0t} = 1 = c_0 + c_1 \cdot 0$$
$$e^{-4t} = c_0 + c_1 \cdot (-4)$$

$c_0 = 1$ ve $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-4t}$ bulunur.

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-4t} \right) \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}0{,}5+0{,}5e^{-4t} & 1-e^{-4t}\\ 0{,}25-0{,}25e^{-4t} & 0{,}5+0{,}5e^{-4t}\end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At}=I$.

<u>2. yol:</u> $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ $sI-A=\begin{bmatrix}s+2 & -4\\ -1 & s+2\end{bmatrix}$

$$|sI-A|=s^2+4s=s(s+4)$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+4)}\begin{bmatrix}s+2 & 4\\ 1 & s+2\end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{0{,}5}{s}-\dfrac{0{,}5}{s+4} & \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+4}\\ \dfrac{0{,}25}{s}-\dfrac{0{,}25}{s+4} & \dfrac{0{,}5}{s}-\dfrac{0{,}5}{s+4}\end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At}=\begin{bmatrix}0{,}5+0{,}5e^{-4t} & 1-e^{-4t}\\ 0{,}25-0{,}25e^{-4t} & 0{,}5+0{,}5e^{-4t}\end{bmatrix}$$

3.5) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -8 & -5\end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm: <u>1. Yol:</u> $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 8 & \lambda+5\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1\,,\ \lambda_2=-3$.

$$e^{-t}=c_0+c_1\cdot(-1)$$
$$e^{-3t}=c_0+c_1\cdot(-3)$$

$c_1=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$ ve $c_0=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$ bulunur.

$$e^{At}=c_0I+c_1A=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ -8 & -5\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-3t} & 0{,}5e^{-t}-0{,}5e^{-3t}\\ -4e^{-t}+4e^{-3t} & -e^{-t}+2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t = 0$ için $e^{At}=I$.

<u>2. yol:</u> $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ $sI-A=\begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 8 & s+5\end{bmatrix}$

$$|sI-A|=s^2+4s+3=(s+1)(s+3)$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -8 & s-1\end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+3} & \frac{1/2}{s+1}-\frac{1/2}{s+3} \\ \frac{-4}{s+1}+\frac{4}{s+3} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-3t} & 0{,}5e^{-t}-0{,}5e^{-3t} \\ -4e^{-t}+4e^{-3t} & -e^{-t}+2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

3.6) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

(Çakışık köklü e^{At} sorusu Güz 2015-16'da sorulmayacak)

Çözüm: 1. Yol: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -8 & \lambda+6 \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+4=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=-2\,.$

$$e^{-2t}=c_0+c_1\cdot(-2)$$

$$\left[\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\right]_{\lambda=-2}=te^{-2t}=\left[\frac{d}{d\lambda}(c_0+c_1\cdot\lambda)\right]_{\lambda=-2}=c_1$$

Yani doğrudan $c_1=te^{-2t}$ bulunur ve ilk denklemde yerine yazılarak $c_0=e^{-2t}+2te^{-2t}$ bulunur.

$$e^{At}=c_0I+c_1A=(1+2t)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+te^{-2t}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} (1+4t)e^{-2t} & -2te^{-2t} \\ 8te^{-2t} & (1-4t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sağlaması, $t=0$ için $e^{At}=I$.

2. yol: $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ $\qquad sI-A=\begin{bmatrix} s-2 & 2 \\ -8 & s+6 \end{bmatrix}$

$$|sI-A|=s^2+4s+4=(s+2)^2$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)^2}\begin{bmatrix} s+6 & -2 \\ 8 & s-2 \end{bmatrix}$$

Her bir eleman basit kesirlere ayrılır. (Bildiğiniz için burada atlandı)

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2}+\frac{4}{(s+2)^2} & \frac{-2}{(s+2)^2} \\ \frac{8}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+2}-\frac{4}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Ters Laplace dönüşümü alınınca önceki yönteminkiyle aynı sonuç bulunur:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+4t)e^{-2t} & -2te^{-2t} \\ 8te^{-2t} & (1-4t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4. Grup:

4.1) $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -10 ve -10 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u ne olmalıdır?

Yardımcı formül: $K_r = -(CA_c^{-1}B)^{-1}$

Çözüm: $u = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{K} x + K_r y^*$ durum denkleminde yerine yazılırsa,

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + K_r y^*) = A_c x + BK_r y^*$$

Burada $A_c = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2-2k_1 & 3-2k_2 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ 2+2k_1 & \lambda - 3 + 2k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2k_2 - 4)\lambda + (3 - 2k_2 + 10 + 10k_1)$,

istenen özdeğerlere karşılık gelen $(\lambda + 10)(\lambda + 10) = \lambda^2 + 20\lambda + 100$ polinomuna eşitlenmelidir.

Yani $2k_2 - 4 = 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_2 = 12}$

$13 - 2k_2 + 10k_1 = 100 = 13 - 2 \cdot 12 + 10k_1 = -11 + 10k_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_1 = 11{,}1}$

Buna göre $A_c = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2-2\cdot 11{,}1 & 3 - 2\cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -24{,}2 & -21 \end{bmatrix}$ $\qquad A_c^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_c)} \mathrm{Adj}(A_c)$

$\det(A_c) = -21 + 5 \cdot 24{,}2 = 100 \qquad A_c^{-1} = \dfrac{1}{100} \begin{bmatrix} -21 & -5 \\ 24{,}2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}21 & -0{,}05 \\ 0{,}242 & 0{,}01 \end{bmatrix}$

$$CA_c^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}21 & -0{,}05 \\ 0{,}242 & 0{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}02 \end{bmatrix} = -0{,}08$$

$$K_r = -(CA_c^{-1}B)^{-1} = -\frac{1}{CA_c^{-1}B} = -\frac{1}{-0{,}08} = \boxed{K_r = 12{,}5}$$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -11{,}1x_1 - 12x_2 + 12{,}5y^*}$ olmalıdır.

4.2) $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -8 & -6 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -10, -11 ve -12 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u ne olmalıdır?

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla,

$\boxed{K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}}}$ (α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

Çözüm: Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda+10)(\lambda+11)(\lambda+12) = \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \lambda^3 + 33\lambda^2 + 362\lambda + 1320$

$k_1 = 1320 - 3 = \boxed{k_1 = 1317}$

$k_2 = 362 - 8 = \boxed{k_2 = 354}$

$k_3 = 33 - 6 = \boxed{k_3 = 27}$

Yani $K = \begin{bmatrix} 1317 & 354 & 27 \end{bmatrix}$

$\alpha_0 = 1320 \qquad K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}} = \boxed{K_r = \frac{1320}{7}}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -1317x_1 - 354x_2 - 27x_3 + \frac{1320}{7} y^*}$ olmalıdır**.**

4.3) $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -5 ve -6 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u ne olmalıdır?

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla,

$\boxed{K_r = \frac{\alpha_0}{C_{11}}}$ (α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

Çözüm: Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda+5)(\lambda+6) = \lambda^2 + 11\lambda + 30$

$k_1 = 30 - 4 = \boxed{k_1 = 26}$

$k_2 = 11 + 7 = \boxed{k_2 = 18}$

Sağlaması: $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4-26 & 7-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30 & -11 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 30 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 30 \ \checkmark$$

(Sağlamasını yapmak zorunda değilsiniz, ama sayıların sırasını karıştırıp tersten kullanmak çok muhtemel olduğu için sağlama yapmanız tavsiye edilir.)

$\alpha_0 = 30$ $\qquad\qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \dfrac{30}{2} = \boxed{K_r = 15}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -26x_1 - 18x_2 + 15y^*}$ olmalıdır**.**

4.4) $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -3 ve -3 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u ne olmalıdır?

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla,

$\boxed{K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$ (α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

Çözüm: Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$

$k_1 = 9 - 5 = \boxed{k_1 = 4}$

$k_2 = 6 + 0 = \boxed{k_2 = 6}$

Sağlaması: $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5-4 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9 \ \checkmark$$

$\alpha_0 = 9 \qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \boxed{K_r = \dfrac{9}{4}}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -4x_1 - 6x_2 + \dfrac{9}{4} y^*}$ olmalıdır.

4.5) $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad , \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$

ile verilen sistemde y çıkışının, y^* sabit referans (talep) değerine, -8 ve -9 özdeğerleriyle yakınsaması, durum geribeslemeli kontrol uygulanarak isteniyor. Bunun için u ne olmalıdır?

Yardımcı formül: Tek girişli tek çıkışlı denetleyici kanonik biçimli sistem için $C_{11} \neq 0$ şartıyla,

$\boxed{K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}}}$ (α_0 istenen karakteristik polinomun sabit terimi)

Çözüm: Sistem denetleyici kanonik biçimde verilmiştir. İstenen özdeğerler için karakteristik polinom: $(\lambda+8)(\lambda+9) = \lambda^2 + 17\lambda + 72$

$k_1 = 72 - 2 = \boxed{k_1 = 70}$

$k_2 = 17 - 3 = \boxed{k_2 = 14}$

Sağlaması: $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-70 & -3-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -72 & -17 \end{bmatrix} = A_c$

$$\det(\lambda I - A_c) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 72 & \lambda + 17 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 17\lambda + 72 \ \checkmark$$

$\alpha_0 = 72 \qquad K_r = \dfrac{\alpha_0}{C_{11}} = \boxed{K_r = \dfrac{72}{-5}}$

Sonuç: $u = -Kx + K_r y^* = \boxed{u = -70x_1 - 14x_2 - \dfrac{72}{5} y^*}$ olmalıdır.