Dalga Denklemi ve Düzlem Dalga Çözümü

Maxwell Denklemleri ve Serbest Uzay

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ ve $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ olmak üzere 4 Maxwell denklemi ve her birinin ifade ettiği yasanın diğer gösterimi şöyledir:

$$(1) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \left(e = -\frac{d\psi}{dt} \ \text{Faraday indüksiyon yasası}\right)$$

$$(2) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \ \text{Manyetik tek kutuplu yokluğu}\right)$$

$$(3) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \qquad \left(\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{iç} + i_{deplasman} \ \text{Amper yasası}\right)$$

$$(4) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \qquad \left(\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{iç} \ \text{Gauss yasası}\right)$$

Bu formüllerde alan oluşumuna neden olan kaynak ρ_e ile $\vec{J}$ ’dir. (Süreklilik denklemi: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$)

Boş olmayan bir ortamda nötr haldeki maddeler içerisindeki elektron hareketleri ve kutuplaşmalarını, $\vec{J}$ ve ρ_e ile hesaba katmak yerine kolaylık için μ ve ε ile hesaba katmak tercih edilir. “Serbest uzay” derken boş uzayı değil, dalgaya karşı engellerle sınırlandırılmamış uzayı kastediyoruz. Yani serbest uzay $\mu \neq \mu_0$ veya $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ olan madde ile dolu olabilir. Ortamda nötr haldeki madde hariç ayrıca ρ_e ve $\vec{J}$ (ikisi de) yoksa “kaynaksız ortam” deriz.

$$\text{Kaynaksız ortamda:} \quad \vec{J} = 0 \quad \text{ve} \quad \rho_e = 0$$

Kaynaksız Ortamda Genel Dalga Denklemi

(1) denkleminin rotasyonelini alalım ve sonra da bunun temel vektör formüllerindeki karşılığını yazalım:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{\varepsilon}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{H})}{\partial t}$$

(4) ve (3) kullanılırsa: $\vec{\nabla}\rho_e - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ olur. $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ve kaynaksız ortamda $\vec{J} = 0$ ve $\rho_e = 0$ olduğundan, <u>elektrik alan için genel dalga denklemi</u> şöyle bulunur:

$$(5) \qquad \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Benzer işlemleri (3) denklemi üzerinde yapalım, yani iki tarafın da rotasyonelini alıp karşılığını yazalım:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{D})}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{J}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=\frac{1}{\mu}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})=0$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ ve yine kaynaksız ortamda $\vec{J}=0$ yerine yazılırsa, (1) yardımıyla:

$$-\nabla^2\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{E})}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$\vec{B}=\mu\vec{H}$ yazılıp düzenlenerek <u>manyetik alan için genel dalga denklemi</u> şöyle bulunur:

$$\text{(6)}\qquad \boxed{\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0}$$

Görüldüğü gibi hem $\vec{E}$ hem $\vec{H}$ 'nin, hatta istenirse bunların yerine sırasıyla hem $\vec{D}$ hem $\vec{B}$ 'nin *x*, *y*, *z* bileşenlerinden her biri (*U* diyelim) için <u>genel dalga denklemi</u>:

$$\text{(7)}\qquad \boxed{\nabla^2 U-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0}$$

Boşluk için genel dalga denkleminin 4 boyutlu simetriye sahip olduğu daha sonra gösterilecektir.

Serbest Uzayda Kayıpsız Ortamda Düzlem Dalga Çözümü

U aslında $U(x,y,z,t)$ biçiminde uzay zamanın bir fonksiyonudur. Doğrusal ortamlarda Fourier analiziyle her frekans bileşeni ayrı ayrı incelenebileceğinden, rad/s cinsinden sabit bir ω açısal frekansıyla ilgilenirsek, zaman bağımlılığını $e^{j\omega t}$ çarpanıyla gösterebiliriz. Dalga denkleminin doğrusallığından dolayı tüm $\partial/\partial t$ operatörleri $j\omega$ çarpanı etkisi yapar (zamana göre ikinci türev de $-\omega^2$ çarpanı). $\nabla^2 U$ ifadesini de açarsak dalga denklemi:

$$\text{(8)}\qquad \frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial z^2}+\mu\varepsilon\omega^2 U(x,y,z,t)=0$$

Dalgalar kaynağından çok uzaklarda küçük bir bölgeden bakıldığında düzlemsel varsayılabilir. Genel bir çözüm iddiasında bulunmadan, dalga arayışımızdan dolayı, sadece *x*, *y*, *z*, *t* bağımlılıklarının birbirinden ayrıştırılmış çarpan terimleri halinde olduğunu düşünerek çözüm arayalım:

$$U(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t}$$

Burada ilgili değişkene bağımlılık, ilgi harfin büyüğüyle fonksiyon olarak yazıldı. Buna göre dalga denklemi:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)Z(z)e^{j\omega t}+X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}Z(z)e^{j\omega t}+X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}e^{j\omega t}+\mu\varepsilon\omega^2 X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t}=0$$

Aslında birer değişkenli olduklarından kısmi türev normal türevdir. Denklemi $X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t}$ 'ye bölelim:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\mu\varepsilon\omega^2=0$$

Soldaki toplam terimlerinden sonuncusu sabit olduğundan, diğer üçü de sabit olmak zorundadır. Çünkü *x*, *y*, *z*'den sadece birini değiştirmekle diğerleri değişmez; öyleyse o değişkene bağlı terim de değişmemelidir.

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=c_x\ ,\quad \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=c_y\ ,\quad \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=c_z$$

sabitlerine eşitleyelim. Hepsi aynı biçimli olduğundan mesela *x* bağımlılığına bakalım:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-c_xX(x)=0$$

sabit katsayılı doğrusal adi diferansiyel denklemin karakteristik kökleri $\sqrt{c_x}$ ve $-\sqrt{c_x}$ 'tir. $c_x > 0$ olsaydı, bu kökler reel olur ve çözüm bileşenleri $e^{\sqrt{c_x}x}$ ve $e^{-\sqrt{c_x}x}$ terimli olurdu ki bunlar kısa bir mesafede ya sönümlenir ya sonsuza giderdi; yani dalga ifadesi vermezdi. $c_x = 0$ da sabit ve t çarpanı vereceğinden dalga ifadesi olmaz. Biz dalga ifadesi veren çözümle ilgilendiğimiz için $c_x < 0$ alacağız ve köklerine jk_x ve $-jk_x$ diyeceğiz. Zaman bağımlılığıyla birlikte düşünüldüğünde, diğer çarpanlar hariç

$$e^{jk_x x}e^{j\omega t} \quad \text{ve} \quad e^{-jk_x x}e^{j\omega t}$$

çarpanlı terimler ortaya çıkar. Zaman (t) ilerlerken aynı faz noktasının (mesela tepe noktasının) koordinat değişimi bunlardan birincisinde $-x$ yönünde, ikincisinde $+x$ yönündedir. Yani farklı yönlerde hareket eden dalgalara karşılık gelmektedirler. Biz bunlardan yalnız birisiyle, $+x$ yönünde varsayarak, ilgilenelim; eğer diğer yöndeyse de bu k_x 'in işareti içinde düşünülebilir. Yani yalnız ikinci terim bir dalganın x ve t bağımlılığı için yeterince kapsamlı çarpandır. y ve z bağımlılıklarını da ortak bir sabit çarpanla birlikte benzer biçimde yazarsak serbest uzayda düzlem dalga çözümü:

$$(9) \qquad U(x,y,z,t) = Ae^{-jk_x x}e^{-jk_y y}e^{-jk_z z}e^{j\omega t}$$

Dalga vektörü=dalga sayısı, dalga hızı, dalga boyu

$$\text{Dalga vektörü: } \vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

diye tanımlanır. Konum vektörü $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ olduğundan, düzlem dalganın ilgilenilen bileşeni kısaca

$$U(x,y,z,t) = Ae^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}$$

biçiminde de yazılabilir. $\vec{r}$ konum vektörünün büyüklüğünü, zaman (t) ilerlerken $\vec{k}$ vektörü yönünde

$$\omega t - kr = \text{sabit faz}$$

olacak bir hızla artırırsak dalganın hep aynı fazı üzerinde (mesela tepe noktasında) bulunmuş oluruz. Yani $\vec{k}$ vektörü dalganın ilerleme yönünü vermektedir. Dalga vektörüne "dalga sayısı" da denir. Dalganın hızını bulmak için bu sabit faz ifadesinin zamana göre türevini alıp konum vektörünün mutlak değer türevini çekelim:

$$\omega - k\frac{dr}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \boxed{v = \frac{\omega}{k}} = \text{dalga hızı}$$

bulunur. Burada $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Dalga hızını bilinen değerler cinsinden bulmak için (9) denkleminin kısmi ikinci türevlerini alıp (8)'de yerine yazarsak

$$\left[(-jk_x)^2 + \left(-jk_y\right)^2 + (-jk_z)^2 + \mu\varepsilon\omega^2\right]Ae^{j(-k_x x - k_y y - k_z z + \omega t)} = 0$$

Her x, y, z, t için bunun sağlanması, ancak köşeli parantez içinin sıfır olmasıyla mümkündür:

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu\varepsilon\omega^2 = 0}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \qquad \text{Dalga hızı} = \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

Işığın boşluktaki hızı $= \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299\,792\,458 \ \text{m/s}} \approx 3 \times 10^8 \ \text{m/s}$.

Dalganın ilerleme yönünde aynı fazdan ardışık ikisi arasındaki mesafeye dalga boyu (λ) denir. Düzlemsel dalgalarda zamana göre bir periyottaki ($T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$) ilerleme mesafesi vT dalga boyudur:

$$\boxed{\lambda = \frac{v}{f}} = \frac{2\pi v}{\omega} = \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Karakteristik Empedans

Düzlem dalgalarda $\vec{\nabla}$ operatörünün yerini $-j\vec{k}$ çarpanı alır. Mesela (1) ve (3) Maxwell denklemleri şu hale gelir:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\rightarrow\quad -j\vec{k}\times\vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{k}\times\vec{E} = \mu\omega\vec{H}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \underbrace{\vec{J}}_{0} \quad\rightarrow\quad -j\vec{k}\times\vec{H} = j\omega\vec{D} \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{k}\times\vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E}}$$

Düzlem dalgalarda $\vec{k}$, $\vec{E}$ ve $\vec{H}$ birbirine dik vektörlerdir. Buna göre mesela $\vec{E} = E_x\hat{x}$ ve $\vec{H} = H_y\hat{y}$ ise $\vec{k} = k\hat{z}$ olur. Böylece

$$kE_x = \mu\omega H_y \quad\rightarrow\quad \frac{E_x}{H_y} = \mu\frac{\omega}{k} = \mu v = \mu\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

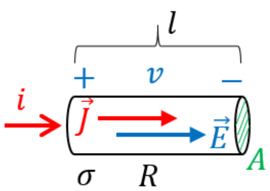
ortama bağlı bir sabit olur. Genel olarak +z yönünde ilerleyen bir dalga için ortamın karakteristik empedansı

$$\boxed{\eta = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}}$$ olup serbest uzayda düzlem dalgalarda $$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}},$$

boşlukta ise $$\boxed{\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi\ \Omega \approx 377\ \Omega}$$

Karakteristik empedans ortam malzemesinden başka, ileride görülecek kılavuzlu dalgalarda dalganın türüne göre de farklı olabilmektedir.

Ohm Kanununun Noktasal Biçimi



Şekildeki gibi öziletkenliği σ olan çok küçük bir bölge komşuluğunda akım yoğunluğu vektörü ($\vec{J}$), elektrik alan vektörüyle aynı yönlüdür. Aynı yöne göre i akım, v gerilim için

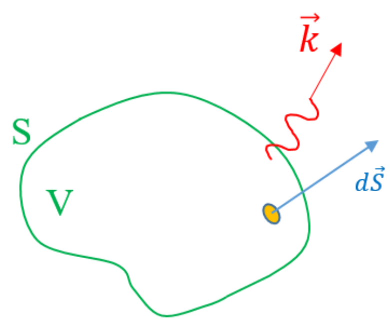
$$i = JA \ , \quad v = El \ , \quad R = \frac{l}{\sigma A}$$

olduğundan, $i = v/R$ Ohm kanunu formülü şu hale gelir:

$$JA = El\frac{\sigma A}{l} \quad\rightarrow\quad J = \sigma E \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

Hacimsel güç yoğunluğu ise $\dfrac{vi}{lA} = \dfrac{ElJA}{lA} = EJ \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{E}\cdot\vec{J}}$ (anlık)

Güç Yoğunluğu (Poynting) Vektörü



Yandaki gibi S kapalı yüzeyiyle sınırlı V hacimsel bölgesi içinde dalga kaynağı olsun ve $\vec{k}$ dalga vektörü ile dışarı çıkıyor olsun. Çıkan dalganın dışarı taşıdığı güç; içeride ortamın rezistif davranışından dolayı birim hacimde ısıya dönüşen $\vec{E}\cdot\vec{J}$ gücü, elektrik alanın birim hacminde depolanan $\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ enerjisinin zamana göre türevi ve manyetik alanın birim hacminde depolanan $\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ enerjisinin zamana göre türevi toplamının hacimsel integralinin negatifine eşittir; çünkü bu üç bileşen, dalgayla dışarı taşınan kadar azalmaktadır.

$$\text{Dalganın dışarı taşıdığı güç } = \int_V \left[-\vec{E}\cdot\vec{J} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}\right)\right] dV$$

$$\text{Burada } \; -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Benzer şekilde } \; -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H} - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \; \text{ olduğundan,}$$

$$\text{Dalganın dışarı taşıdığı güç } = \int_V \left[\vec{H}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\cdot\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right)\right] dV$$

Yuvarlak parantez içleri sırasıyla (1) ve (3) Maxwell denklemlerinin sağ taraflarıdır. Bunları, sol taraflarıyla değiştirirsek:

$$\text{Dalganın dışarı taşıdığı güç } = \int_V \underbrace{\left[\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})\right]}_{\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})} dV$$

Köşeli parantez içinin, vektör formüllerine göre karşılığı yazılıp Stoke teoremi uygulanırsa:

$$\text{Dalganın taşıdığı güç } = \int_V [\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})] dV = \oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

$$\text{Buna göre, anlık Poynting vektörü } \boxed{\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

adıyla tanımlanan vektörün, $\vec{k}$ dalga vektörü yönünde taşınan yüzeysel güç yoğunluğu olduğu anlaşılmaktadır; çünkü $\vec{E}$ ile $\vec{H}$ birbirine dik ve $\vec{k}\times\vec{E}$ 'nin yönü, $\vec{H}$ 'ın yönü olduğundan, $\vec{k}$ 'nın yönü de $\vec{E}\times\vec{H}$ 'ın yönüdür.

Dalga bileşenleri sinüzoidal olduğundan, devre teorisinde güç için vektörlerin birbirine göre açısı önemli olduğundan ortalama gücün $\mathcal{R}e\{\vec{V}\vec{I}^*\}$ olması gibi (* eşlenik anlamında), ortalama güç yoğunluğu vektörü,

$$\text{ortalama Poynting vektörü } \boxed{\vec{P}_{ort} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}}$$

diye kullanılır. Devre teorisinde akım ve gerilim vektörlerinin büyüklükleri rms değerleri olduğu için ½ katsayısı gelmezken, burada genlikler doğrudan kullanıldığından ½ katsayısı geldi.

İletkenliği Olan (σ < ∞) Ortamlarda Düzlem Dalga Yayılımı

Daha önce bulduğumuz

$$\vec{\nabla}\rho_e - \nabla^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

ara denkleminde $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\rho_e = 0$ ve $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ yazılarak dalga denklemi yeniden çıkartılmalıdır.

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (*)$$

Diğer yandan,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = \frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{D})}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{J}$$

denkleminde $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \frac{1}{\mu}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ve $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ yazılırsa

$$\rightarrow \quad -\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{E})}{\partial t} + \sigma\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \quad \nabla^2\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad (**)$$

Görüldüğü gibi yine U, elektrik veya manyetik alanın herhangi bir bileşeni olmak üzere hem (*) hem de (**) denkleminin her bir bileşeni aynı biçimlidir:

$$\boxed{\nabla^2 U - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial U}{\partial t} = 0} \; (***)$$

Ayrıca $\nabla \rightarrow -jk$ ve $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ yazarak:

$$(-jk)^2 U - \mu\varepsilon(j\omega)^2 U - \mu\sigma(j\omega)U = 0$$

$$\rightarrow \quad -k^2 U + \mu\varepsilon\omega^2 U - j\mu\sigma\omega U = 0$$

$$\rightarrow \quad (k^2 + j\mu\sigma\omega) - \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

Görüldüğü gibi daha önceki dalga denklemindeki k^2 yerine $(k^2 + j\mu\sigma\omega)$ gelmiştir. Buna göre önceki denklemlerdeki ε yerine $\varepsilon - j\,\sigma/\omega = \varepsilon' + j\varepsilon''$ gibi karmaşık bir parametre gelmiştir (ε' ve ε'' reel). Diğer bir bakış açısıyla da önceki jk yerine $\alpha + j\beta$ gibi karmaşık dalga sayısı gelecektir (α ve β reel). Bunun sonucunda üssü sanal olan ve sabit genlikli salınımlara karşılık gelen terimler $e^{-\alpha r}e^{-j\beta r}e^{j\omega t}$ haline gelir ki buradaki $e^{-\alpha r}$ üstel terimi, dalganın ilerleme yönü r boyunca dalga genliğinin sönümlendiği anlamına gelir. Bu yüzden iletkenliği olan ortamlar, düzlem dalgalar için kayıplı ortamlardır ve (***) denklemi de kayıplı ortamlar için düzlem dalga denklemidir.

Son denklemde $jk = \alpha + j\beta$ yani $k^2 = -(\alpha + j\beta)^2$ yazarak α ve β 'yı bulalım:

$$-(\alpha + j\beta)^2 + j\mu\sigma\omega - \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad -\alpha^2 - j2\alpha\beta + \beta^2 + j\mu\sigma\omega - \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 + \mu\varepsilon\omega^2 = 0 \;\; (\Delta) \quad \text{ve} \quad -2\alpha\beta + \mu\sigma\omega = 0 \;\; (\Delta\Delta)$$

$$(\Delta\Delta) \rightarrow \alpha = \frac{\mu\sigma\omega}{2\beta} = 0 \rightarrow (\Delta) \quad \rightarrow \quad \frac{(\mu\sigma\omega)^2}{4\beta^2} - \beta^2 + \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad (\beta^2)^2 - \mu\varepsilon\omega^2(\beta^2) - \frac{(\mu\sigma\omega)^2}{4} = 0$$

$$\rightarrow \quad \beta^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} \quad \text{(eksi karekök alınmaz, çünkü } \beta^2 > 0)$$

$$\rightarrow \quad \beta^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right) \quad \rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right)}$$

Dikkat edilirse β^2 'nin $\sigma = 0$ durumundaki $\mu\varepsilon\omega^2$ değerinden biraz daha büyük olduğu görülür. Bu yüzden belirli bir fazın ilerleme hızı ω/β, kayıpsız durumdaki $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ değerinden daha küçüktür. Yani aynı $\mu\varepsilon$ için iletken (kayıplı) ortamda dalga, iletken olmayan ortamdakinden biraz yavaştır.

Diğer yandan

$$\beta \;\rightarrow\; (\Delta) \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \beta^2 - \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right)}}$$

Dalganın genliği $e^{-\alpha r}$ çarpanıyla, Poynting vektörü büyüklüğü ise bunun karesi yani $e^{-2\alpha r}$ çarpanıyla $\vec{r}$ boyunca sönümlenir.