Pivot
Bir matrisin her satırının sıfırdan farklı ilk elemanına o satırın pivotu denir. O satır hep sıfır ise o satırın pivotu yoktur.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Bu matriste 1. satırın pivotu 3'tür. 2. satırın pivotu yoktur. 3. satırın pivotu -6'dır.

Satır Eşelon Form (REF)
Bir matrisin, yalnız temel satır işlemleri ile, her satırının pivotunun varsa altındaki bütün elemanları sıfır yapılmış satır eşdeğeridir. Ayrıca varsa hep sıfır olan satırlar en altta olmalıdır, gerekirse satırlar yer değiştirilerek.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -1 \\ 12 & 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İndirgenmiş Satır Eşelon Form (RREF)
Satır eşelon forma ek olarak hem pivotlar 1, hem de pivotların üstündeki tüm elemanlar da sıfır olmalıdır.

Örnek:

Yukarıdaki örnekte temel satır işlemlerine devam edilirek:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{rref}$$

İşte en sonda bulduğumuz A^{rref} matrisi, baştaki A matrisinin indirgenmiş satır eşelon formudur.

Görüntü Uzayı için bir Taban
Bir A matrisinin RREF hali A^{rref} pivotları hangi sütunlarda ise, ilk matris A'nın o sütunları, $R(A)$ için bir taban oluşturur.

Örnek:

Yukarıdaki örnekte

$$\mathcal{B}_{R(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Elbette bu vektörlerin sıfırdan farklı birer katsayıyla çarpılmışları da kullanılabilir. Mesela ilk vektör yerine $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sıfır Uzayı için bir Taban

$$A^{rref} x = 0$$

denklemi, değişken x vektörü için şöyle çözülür:

Pivot içeren sütunlara karşılık gelen (o sütunlarla çarpılan) x konumlarına *bağımlı değişkenler* tanımlanır. Son örnekte 1. ve 3. sütunlarla çarpılan konumlara b_1 ve b_3 değişkenleri yazmak gibi.

Pivot içermeyen sütunlara karşılık gelen (o sütunlarla çarpılan) x konumlarına ise *serbest değişkenler* tanımlanır. Son örnekte 2. ve 4. sütunlarla çarpılan konumlara s_2 ve s_4 değişkenleri yazmak gibi.

Böylece oluşturulan x değişken vektöründeki değişkenler, $x=\begin{bmatrix} b_1 \\ s_2 \\ b_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$ olur. İşte bu x vektörü ile $A^{rref}x=0$

denklemindeki bağımlı değişkenleri bağımsız denklemler cinsinden bulup x'te yerine koyduğumuzda, yani örneğimiz için

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ s_2 \\ b_3 \\ s_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} b_1 &= -\frac{5}{6}s_2-\frac{5}{6}s_4 \\ b_3 &= 0\cdot s_2+2s_4 \end{aligned}$$

$$x=\begin{bmatrix} -\frac{5}{6}s_2-\frac{5}{6}s_4 \\ s_2 \\ 2s_4 \\ s_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5/6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}s_2+\begin{bmatrix} -5/6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}s_4$$

şeklinde x vektörünü serbest değişkenlerin sabit vektör katsayılarıyla çarpılıp toplanmışı halinde buluruz. İşte bu ifadedeki sabit vektörler, sıfır uzayı için bir tabandır. Örneğimiz için:

$$\mathcal{B}_{N(A)}=\left\{\begin{bmatrix} -5/6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -5/6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Sağlaması, bu vektörlerin doğrusal bağımsız olduğunu ve ilk A matrisi ile çarpımının sıfır olduğunu görerek yapılır ve bu sağlama garantidir.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -1 \\ 12 & 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5/6 & -5/6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & -8 \\ 11 & 5 & 8 & 11 & -10 \\ 4 & -5 & 4 & 7 & -3 \\ 8 & -10 & 8 & 14 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisinin görüntü ve sıfır uzayları için birer taban bulalım:

$$A \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & -8 \\ 11 & 5 & 8 & 11 & -10 \\ 0 & -75/11 & 12/11 & 3 & 7/11 \\ 0 & -150/11 & 24/11 & 6 & 14/11 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & -8 \\ 11 & 5 & 8 & 11 & -10 \\ 0 & -75/11 & 12/11 & 3 & 7/11 \\ 0 & -150/11 & 24/11 & 6 & 14/11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & -8 \\ 11 & 0 & 18 & 31 & -50 \\ 0 & 0 & -138/11 & -267/11 & 607/11 \\ 0 & 0 & -276/11 & -534/11 & 1214/11 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3/23 & 55/69 \\ 11 & 0 & 0 & -88/23 & 671/23 \\ 0 & 0 & -138/11 & -267/11 & 607/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3/23 & 55/69 \\ 1 & 0 & 0 & -8/23 & 61/23 \\ 0 & 0 & 1 & 89/46 & -607/138 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8/23 & 61/23 \\ 0 & 1 & 0 & -3/23 & -55/69 \\ 0 & 0 & 1 & 89/46 & -607/138 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=A^{rref}$$

Pivotlar 1., 2., ve 3. sütunlarda. O halde **ilk** A matrisinin 1., 2., ve 3. sütunları A'nın görüntü uzayı için bir taban oluşturan 3 vektördür:

$$\mathcal{B}_{R(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

Sağlaması:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 11 & 5 & 8 \\ 4 & -5 & 4 \\ 8 & -10 & 8 \end{bmatrix} \text{ dersek } \; R(R^T R)^{-1} R^T A - A = 0 \; ✓$$

(*Dikkat! Sağlama yaparken ilk A matrisini kullanıyoruz.*)

(İsteseydik tabandaki herhangi bir vektör yerine onun sıfırdan farklı bir katını da kullanabilirdik.)

Şimdi de sıfır uzayı için bir taban bulmak amacıyla işlemlere devam edelim.

$$x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}, \quad A^{rref} x = 0 \quad \to \quad \begin{matrix} b_1 - \frac{8}{23} s_4 + \frac{61}{23} s_5 = 0 \\ b_2 - \frac{3}{23} s_4 - \frac{55}{69} s_5 = 0 \\ b_3 + \frac{89}{46} s_4 - \frac{607}{138} s_5 = 0 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} b_1 = \frac{8}{23} s_4 - \frac{61}{23} s_5 \\ b_2 = \frac{3}{23} s_4 + \frac{55}{69} s_5 \\ b_3 = -\frac{89}{46} s_4 + \frac{607}{138} s_5 \end{matrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{23} s_4 - \frac{61}{23} s_5 \\ \frac{3}{23} s_4 + \frac{55}{69} s_5 \\ -\frac{89}{46} s_4 + \frac{607}{138} s_5 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = x = \begin{bmatrix} 8/23 \\ 3/23 \\ -89/46 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s_4 + \begin{bmatrix} -61/23 \\ 55/69 \\ 607/138 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s_5$$

s_4 ve s_5'in katsayısı olan vektörler, ilk A matrisinin de sıfır uzayı için bir taban oluşturur. Veya istersek tabandaki herhangi bir vektör yerine onun sıfırdan farklı bir katını da kullanabiliriz. Öyle yapalım. Kesirlerden kurtarmak için 1. vektörü 46 ile, 2. vektörü 138 ile çarparak alalım:

$$\mathcal{B}_{N(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ -89 \\ 46 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -366 \\ 110 \\ 607 \\ 0 \\ 138 \end{bmatrix} \right\}$$

Sağlaması:

$$N = \begin{bmatrix} 16 & -366 \\ 6 & 110 \\ -89 & 607 \\ 46 & 0 \\ 0 & 138 \end{bmatrix} \quad \text{dersek } \; AN = 0 \; ✓$$

(*Dikkat! Sağlama yaparken ilk A matrisini kullanıyoruz.*)