# 3. NORMLU VEKTÖR UZAYLARI:

## 3.1. NORM:

3.1.1. Tanım: F cismi, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere, F cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı düşünelim. Negatif olmayan değerler alan bir $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ fonksiyonu, şu şartları sağlıyorsa bir "norm" olarak adlandırılır:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$

(ii) $\forall \alpha \in F$, $\forall x \in V$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

ki burada $F = \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ ise

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \text{ ise} \\ -\alpha & \alpha < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ya da $F = \mathbb{C}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ ise

$$|\alpha| = +\sqrt{\alpha \cdot \alpha^*}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(iii) $\forall x, y \in V$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

### 3.1.2. Örnekler ve başlıca normlar:

Örnek 1) $V = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ olsun.

$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ normu şöyle tanımlanır:

$$\|x\|_1 \triangleq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \left(\text{Burada } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

Norm kabullerinin sağlandığını gösterelim:

(i) $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \rightarrow |x_i| = 0 \quad i=1,\ldots,n \rightarrow x = 0$ ✓

$x = 0 \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |0| = 0$ ✓

Yani $\|x\|_1 = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| |x_i|$ ✓

(iii) $\|x+y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\| + \|y\|$

Yani $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ✓ Hepsi sağlanıyor.

Örnek: 2) Öklidyen norm : $\|\cdot\|_2$

$V=\mathbb{R}^n$ , $F=\mathbb{R}$ olsun. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ şöyle tanımlanır:

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2\right)^{1/2}$$

: Genellikle bir vektörün normu ya da mutlak değeri denilince bunu kastederler.

Norm kabullerinin sağlandığını gösterelim:

(i) $\|x\|_2=0 \implies |x_i|=0 \quad (i=1,\dots,n) \to x_i=0 \quad (i=1,\dots,n) \to x=0$ ✓

$x=0 \implies \|x\|_2=0$ (açık)

(ii) $\|\alpha x\|_2 = \left(|\alpha x_1|^2+\dots+|\alpha x_n|^2\right)^{1/2} = |\alpha|\left(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2\right)^{1/2}$
$= |\alpha|\,\|x\|_2$ ✓

(iii) $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2+\|y\|_2$ olduğunu göstermek için

$\|x+y\|_2^2 \leq \left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2$ olduğunu göstermek yeterlidir. (çünkü norm $\geq 0$)

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2+\sum_{i=1}^n |y_i|^2+2\sum_{i=1}^n x_i y_i$$
$$= \|x\|_2^2+\|y\|_2^2+\underbrace{2\sum_{i=1}^n x_i y_i}_{?}$$

İddia: $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_2\|y\|_2$

Dolayısıyla $\|x+y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2 = \left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2$ ✓

İddianın ispatı:

$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_2\|y\|_2$ olduğunu göstermek için

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi bir $a\in\mathbb{R}$ için

$\sum_{i=1}^n (a x_i+y_i)^2 \geq 0$ olduğuna göre,

$$0 \leq \sum_{i=1}^n a^2x_i^2+2a x_i y_i+y_i^2$$

$A \triangleq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$ , $B \triangleq \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ve $C \triangleq \sum_{i=1}^n y_i^2 = \|y\|_2^2$ olsun.

Yani $0 \leq a^2A+2aB+C$

Eğer $A=0 \Rightarrow x=0$ olduğundan iddianın doğruluğu açıkça görülebilir.

Eğer $A>0$ ise $a=-\frac{B}{A}$ seçelim. Böylece

$$0 \leq \left(-\frac{B}{A}\right)^2 A + 2\left(-\frac{B}{A}\right)B + C$$

$$0 \leq -\frac{B^2}{A} + C$$

$0 \leq AC - B^2$ yani $B^2 \leq AC$ olduğundan, iddia doğrulanmıştır.

**Örnek:3)** $V=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}$ olsun. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlanır:

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

$\|\cdot\|_p$ bir normdur.

**Örnek. 4)** $V=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}$ olsun. $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlanır.

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i \leq n} |x_i| \qquad (|x_i|\text{'lerin en büyüğü})$$

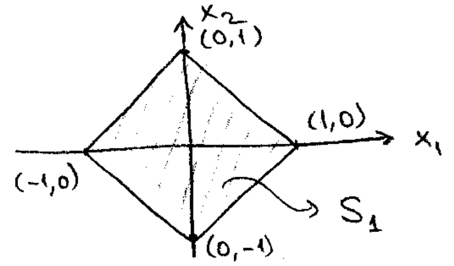
Norm kabullerinin sağlandığını gösteriniz.

**Örnek 5)** $V=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}$ olsun. Şimdiye kadar tanımlanan normların yorumlanması için

$$S_k \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_k \leq 1\}$$ kümesini tanımlayalım ve

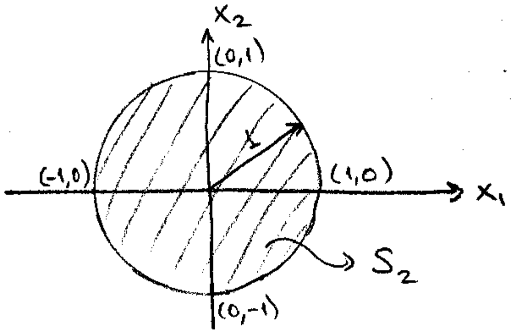
$V=\mathbb{R}^2$ için çizelim:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$



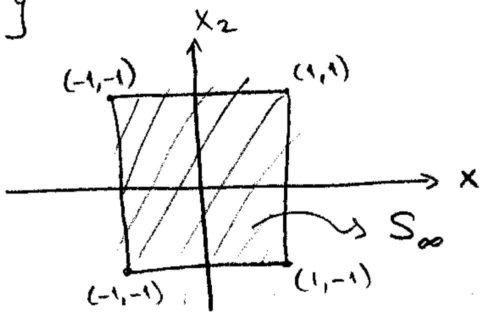

Genel olarak $V=\mathbb{R}^n$ için $S_1$, merkezi orijinde olan, her bir eksenin orijinden ∓birim uzaklığında bir köşesi

$$S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \}$$
Yani: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$




Genel olarak $V = \mathbb{R}^n$ için
$S_2$, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki n-boyutlu birim küredir.

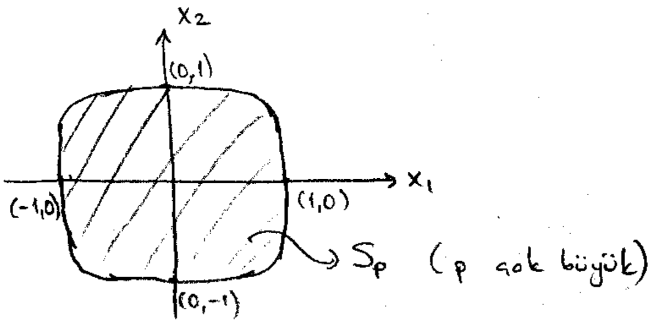
$$S_\infty = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i| \leq 1 \}$$




Genel olarak $V = \mathbb{R}^n$ için
$S_\infty$, merkezi orijinde olan her bir kenarı 2 birimlik ve eksenlerin birine paralel olan n-boyutlu bir küptür.

$$S_p = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1 \}$$

p çok büyürken
$S_p \to S_\infty$'a yaklaşır.




<u>Örnek : 6)</u>

$V = C([a,b]) \triangleq \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ sürekli} \}$ , $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

↳ sürekli fonksiyonlar kümesi

$F = \mathbb{R}$ olsun.

Bu uzayda $\|\cdot\|_1 : C([a,b]) \to [0,\infty)$ şöyle tanımlanır:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Norm kabullerinin sağlandığını gösterelim:

(i) $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ ✓ (açık)

(ii) $\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f(t)|\,dt = |\alpha| \int_a^b |f(t)|\,dt = |\alpha| \cdot \|f\|_1$ ✓

(iii) $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$ ✓

Örnek: 7) $V=C([a,b])$, $F=\mathbb{R}$ olsun. Bu uzayda, $\|\cdot\|_2 : C([a,b]) \longrightarrow [0,\infty)$ normu şöyle tanımlanır:

$$\|f\|_2 = \left[ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \qquad \text{(enerji normu)}$$

Örnek: 8) $V=C([a,b])$, $F=\mathbb{R}$ olsun.

Bu uzayda $\|\cdot\|_p : V \to [0,\infty)$ normu şöyle tanımlanır:

$$\|f\|_p = \left[ \int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Örnek: 9) $V=C([a,b])$, $F=\mathbb{R}$ olsun.

Bu uzayda $\|\cdot\|_\infty : V \to [0,\infty)$ normu şöyle tanımlanır:

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)| = \max |f(t)| \quad , \quad a\leq t\leq b$$

Dikkat: Vektör uzaylarında mesafe kavramı, norm tanımı ile birlikte ortaya çıkar. Genellikle $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $\|\cdot\|_2$ normu mesafe olarak kullanılmakla birlikte, aslında başka normlar da mesafe olarak tanımlanabilir.

## 3.2. NORMLU VEKTÖR UZAYLARINDA YAKINSAMA

3.2.1. Tanım:

$(V,F)$ bir vektör uzayı, ve $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty)$ biçiminde $V$ üzerinde tanımlı bir norm olsun. $(V, F, \|\cdot\|)$ üçlüsü "normlu bir vektör uzayı" dır.

3.2.2. Tanım:

$(V, F, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisinin ($x_n \in V$; $n$: dizi indisi), $x \in V$ gibi bir noktaya yakınsadığı söylenir ancak ve eğer $\|x - x_n\|$ gerçel sayı dizisi $n \to \infty$ 'a giderken sıfıra yakınsıyorsa.

Başka bir ifadeyle, verilen her $\epsilon>0$ reel sayısı için öyle bir $N(\epsilon)$ tamsayısı mevcuttur ki

$\forall n>N(\epsilon)$ için $\|x-x_n\|<\epsilon$ olur (ancak ve eğer $\{x_n\}$ dizisi $x$'e yakınsıyorsa).

Dikkat: Limit vektör, $x$, genellikle önceden bilinmediği için, yakınsamayı tespit edebilmek için başka bir yol bulunmalıdır.

3.2.3. Tanım:

Bir $\{x_n\}$ dizisine, bir "Cauchy dizisi" denir ancak ve eğer verilen her $\epsilon>0$ reel sayısı için

$n,m>N(\epsilon)$ olmak üzere $\|x_n-x_m\|<\epsilon$

şartını sağlayan bir $N(\epsilon)$ tamsayısı mevcutsa.

3.2.3. Teorem:

Eğer $\{x_n\}$ yakınsak (herhangi bir noktaya yakınsayan) bir dizi ise, bu bir Cauchy dizisidir.

İspat:

Verilen her $\epsilon>0$ için öyle bir $N(\epsilon)$ mevcuttur ki

$\forall n>N(\epsilon/2)$ için $\|x_n-x\|<\epsilon/2$ sağlanır. Buna göre

$$\|x_n-x_m\|=\|(x_n-x)+(x-x_m)\|\leq \underbrace{\|x_n-x\|}_{<\frac{\epsilon}{2}}+\underbrace{\|x_m-x\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

her $n,m>N(\frac{\epsilon}{2})$ için

Yani verilen her $\epsilon>0$ için öyle bir $N'(\epsilon)=N(\frac{\epsilon}{2})$ tamsayısı mevcuttur ki her $n,m>N'(\epsilon)$ için $\|x_n-x_m\|<\epsilon$ olur.

Dikkat: Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz.

3.2.4. Tanım:

Eğer normlu bir vektör uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsıyorsa, bu normlu vektör uzayının "tam" olduğu söylenir.

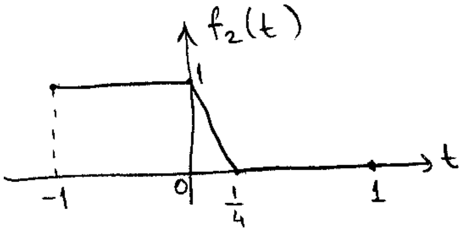
Tam bir normlu vektör uzayına "Banach uzayı" denir.

Örnek: $V = C([-1,1])$, $F = \mathbb{R}$ olsun.

$f \in V$ için $\|f\|_1 \triangleq \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$

$f_n \in V$ şöyle olsun: $f_n(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t < 0 \\ 1 - 2^n t & 0 \le t < \frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \le t \le 1 \end{cases}$

$n = 1, 2, \ldots$




$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} f_n(t) - f_m(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-1=0 & -1 \le t < 0 \\ 0-0=0 & \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} = 0 \le t \le 1 \end{array} \right\} = 0 \quad \forall t \in [-1,1]$$

olduğundan $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_n - f_m\| = 0$. Yani $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Ancak limit noktası (fonksiyonu)

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & -1 \le t < 0 \\ 0 & 0 < t \le 1 \end{array} \right\} \notin C[-1,1]$$

Bu yüzden $(C([-1,1]), \mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ normlu uzayı tam değildir.

# 3.3. DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERDE DOLAYLI NORMLAR:

## 3.3.1. Tanım:

$(V, F, \|\cdot\|_V)$ ve $(W, F, \|\cdot\|_W)$, normlu iki vektör uzayı ve $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. $\mathcal{A}$'nın dolaylı normu şöyle tanımlanır:

$$\|\mathcal{A}\| = \max_{\substack{v \in V \\ v \neq 0_V}} \frac{\|\mathcal{A}(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

Doğrusallık ve norm özellikleri kullanılarak bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\frac{\|\mathcal{A}(v)\|_W}{\|v\|_V} = \left\| \frac{1}{\|v\|_V} \cdot \mathcal{A}(v) \right\|_W = \left\| \mathcal{A}\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W \quad \text{olduğundan,}$$

$$\|\mathcal{A}\| = \max_{\substack{v \in V \\ v \neq 0_V}} \frac{\|\mathcal{A}(v)\|_W}{\|v\|_V} = \max_{\substack{v \in V \\ v \neq 0_V}} \left\| \mathcal{A}\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W = \max_{\|v\|_V = 1} \|\mathcal{A}(v)\|_W$$

$$\boxed{\|\mathcal{A}\| = \max_{\|v\|_V = 1} \|\mathcal{A}(v)\|_W}$$

Öklidyen normlar için, birim kürenin doğrusal dönüşüm altındaki görüntüsünün orijinden en uzak mesafesi anlamına gelir.

## 3.3.2. Örnekler:

Örnek 1) $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$, $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ve $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal dönüşümü, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olmak üzere $\mathcal{A}(v) = w = Av$ olsun. $\|\mathcal{A}\|$ veya diğer bir deyişle $\|A\|$ ne olur?

Çözüm:

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j|$$

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{j=1}^{m} \left( \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \cdot |x_j| = \left( \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \cdot \sum_{j=1}^{m} |x_j|$$

$$\|x\|_1 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j| = 1 \quad \text{olduğundan,}$$

$\|x\|_1 = 1$ için $\|Ax\|_1 \leq \max\limits_{1\leq j\leq m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Ancak $\|A\|_1$'nın sağ tarafa eşit olduğunu söyleyebilmek için, en az bir $x \in \mathbb{R}^m$ ($\|x\|_1 = 1$ olmak üzere) için eşitlik sağlanmalıdır.

$\max\limits_{1\leq j\leq m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ 'deki maksimum $j=p$ için oluyorsa,

$x = \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ vektörünü şöyle seçersek

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} 1 & j = p \\ 0 & j \neq p \end{cases} \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

açıkça $\|\tilde{x}\|_1 = 1$ olur ve

$$\|A\tilde{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \tilde{x}_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ip}| = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

bu $x = \tilde{x}$ için eşitlik sağlanır. Dolayısıyla

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$$

Mesela $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \implies \|A\|_1 = 5$ ($p = 2.$ kolon, mutlak değer toplamı max olan kolon)

Örnek: 2) Yine $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal dönüşümü, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisiyle gösteriliyor olsun (Yani $\mathcal{A}(v) = w = Av$). Fakat $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ ve $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ olsun. $\|\mathcal{A}\|_\infty$ veya $\|A\|_\infty$ ne olur?

Çözüm:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \left[ \max_{1\leq i\leq n} |(Ax)_i| \right]$$

$$= \max_{\|x\|_\infty = 1} \left[ \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| \right]$$

Belirli bir $i$ için $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$ değerini maksimum yapan $\|x\|_\infty = 1$ olan $x$ vektörü ($\tilde{x}^i$ diyelim) şöyledir:

$$\tilde{x}^i_j = \operatorname{sign}(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & a_{ij} \geq 0 \text{ ise} \\ -1 & a_{ij} < 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m$$

($\|\tilde{x}^i\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |\tilde{x}^i_j| = 1$ olduğu açıktır.)

$x = \tilde{x}^i$ için $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ olur. Bu yüzden,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| \right] = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

Buradaki maksimum, $i=p$ için oluyorsa, $\max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$ değerinin maksimumunun elde edildiği $x$ vektörü şudur:

$$x_j = \begin{cases} 1 & a_{pj} \geq 0 \\ -1 & a_{pj} < 0 \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m$$

Sonuç olarak: $\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|}$

Mesela $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = 7$

($p = 2.$ satır, mutlak değer toplamı en büyük olan satır)

3.3.3. Teorem:

Matrisler için herhangi bir dolaylı norm, şu özelliklere sahiptir:

(i) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

(v) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Burada $A: n \times m$, $B$ uygun boyutlarda matrisler ve $x \in \mathbb{R}^m$ herhangi bir vektör.

İspat:

(i) $A=0 \Longrightarrow \|A\|=0$ olması açıkça görülmektedir.

$\|A\|=0 \Longrightarrow \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|=0 \rightarrow \|Ax\|=0 \rightarrow Ax=0$ $\forall x$ ($\|x\|=1$) için.

Bu ancak $A=0$ olmasıyla mümkün olur.

Yani $\|A\|=0 \Rightarrow A=0$.

(ii) $\|\alpha A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|\alpha A x\| = |\alpha| \cdot \left(\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|\right) = |\alpha| \cdot \|A\|$

(iii) $\|A+B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|\underbrace{(A+B)x}_{Ax+Bx}\| \leq \max\limits_{\|x\|=1} \left(\|Ax\| + \|Bx\|\right) \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|Ax\| = \left\| \|x\| \cdot A \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \cdot \left\| A\underbrace{\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{y} \right\|$ ((ii)'den dolayı)

$\leq \|x\| \cdot \underbrace{\left(\max\limits_{\|y\|=1} \|A \cdot y\|\right)}_{\|A\|}$

$\|Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A\|$

(v) $\|A \cdot B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A \cdot \underbrace{B \cdot x}_{y}\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ Bx}}{y}\| \leq \max\limits_{\|x\|=1} \|A\| \cdot \|\underset{\substack{\downarrow \\ Bx}}{y}\|$ ((iv)'den)

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \underbrace{\left(\max\limits_{\|x\|=1} \|\underbrace{Bx}_{y}\|\right)}_{\|B\|} = \|A\| \cdot \|B\|$

Yani $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$