Karmaşık Özdeğerler için e^{At} Matrisinin Bulunması

Özdeğerler karmaşık olduğunda da gerçel özdeğerler için uygulanan yöntemi uygulamak mümkündür tabii; ama o zaman karmaşık katsayılı karmaşık üstel fonksiyonlarla uğraşmamız gerekir. Halbuki A matrisi gerçel ise o fonksiyonların gerçel üstel katsayılı gerçel frekanslı sin ve cos fonksiyonları cinsinden yazılabileceğini biliyoruz. Bu yüzden gerçel özdeğerler için uygulanan yöntemi biraz değiştirerek uygularız.

Karmaşık özdeğerler (eşlenik çift) için özvektörler de karmaşık (eşlenik çift) olur. V matrisi içinde bunların her ikisini de kullanmak yerine önce gerçel kısmını, sonra sanal kısmını iki ayrı özvektör gibi yerleştiririz. Meselâ 5 boyutlu bir A matrisinin özdeğerlerinden $\lambda_{3,4} = \sigma \mp j\omega$, diğerleri gerçel olsun (σ ve ω gerçel). Bunlara karşılık gelen özvektörler de $v_3 = \mathrm{Re}\{v_3\} + j\,\mathrm{Im}\{v_3\}$ ile $v_4 = v_3^*$ olur. Diğer özvektörler veya genelleştirilmiş özvektörlere de v_1, v_2, v_5 dersek modal matris

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \mathrm{Re}\{v_3\} & \mathrm{Im}\{v_3\} & v_5 \end{bmatrix}$$

biçiminde kurulur. Buna göre hiç çakışık özdeğer olmasa bile $\Lambda = V^{-1}AV$ matrisi tam köşegen değil şöyle blok köşegen olur:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Ancak bu yöntemde Λ matrisini ezbere yazmamalıyız; çünkü ω ile $-\omega$ 'dan hangisinin artı olduğuna dair basit bir kural olmadığı için bunlar kolayca ayırt edilebilir değildir. Ters yazmamak için $\Lambda = V^{-1}AV$ işlemini yapıp da elde etmeliyiz. Buna karşılık $e^{\Lambda t}$ matrisi ise

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma t}\cos\omega t & -e^{\sigma t}\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_5 t} \end{bmatrix}$$

bulunur. Bunun ispatını 5 boyutlu Λ matrisi üzerinden yapmak yerine sadece karmaşık kısma karşılık gelen blok üzerinden yapalım. Yani

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

olsun. Buna karşılık gelen $e^{\Lambda t}$ matrisinin,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

diferansiyel çözümünü bütün keyfi x_{30}, x_{40} başlangıç şartları için sağlayan aşağıda yer alan matris olduğunu biliyoruz:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = e^{\Lambda t} \begin{bmatrix} x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix}$$

Diferansiyel denklemi çözmek için kutupsal koordinatlara dönüşüm yapalım:

$$x_3 = r\cos\theta \quad , \quad x_4 = r\sin\theta$$

Bunu diferansiyel denklemde yazalım:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma x_3 - \omega x_4 \\ \omega x_3 + \sigma x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta} r\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta} r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma r\cos\theta - \omega r\sin\theta \\ \omega r\cos\theta + \sigma r\sin\theta \end{bmatrix}$$

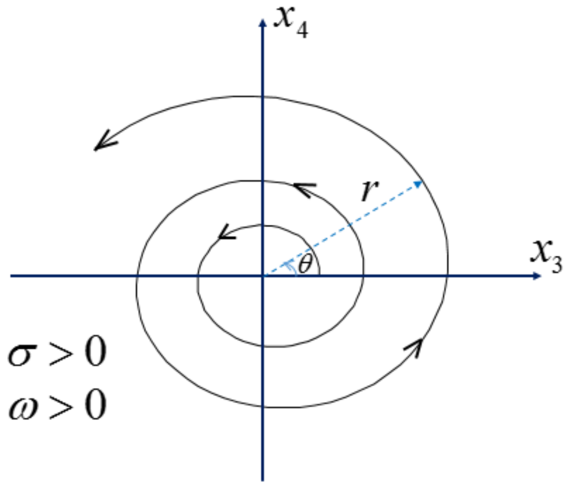
Denklemin her iki satırında da karşılıklı terimleri eşitleyerek aynı denklem çiftini elde ederiz:

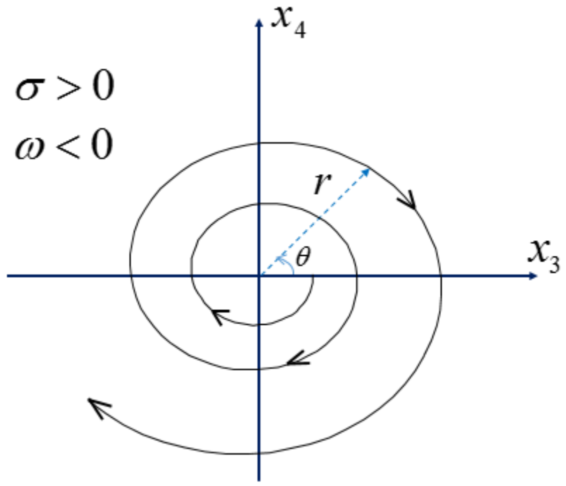
$$\dot{r} = \sigma r \quad , \quad \dot{\theta} = \omega$$

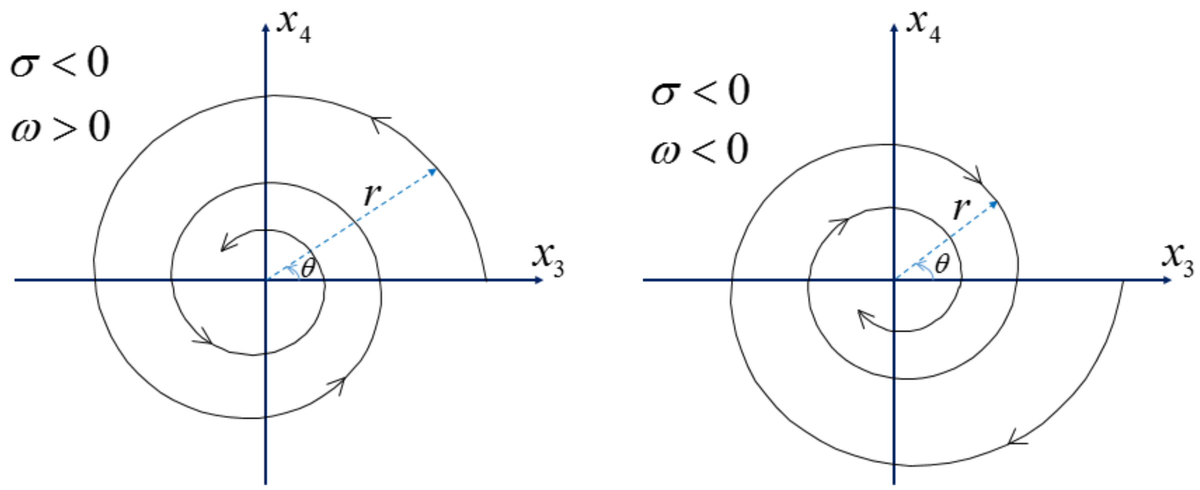
Bunun da $t = 0$'daki r_0 ve θ_0 başlangıç şartları için çözümü

$$r = e^{\sigma t} r_0 \quad , \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

olur. $\theta_0 = 0$ için durum uzayında çizimini yaparsak σ ve ω'nın işaretlerine göre şu şekillerden birini buluruz:







Yeniden kartezyen koordinatlara dönerek ispatı tamamlayalım:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta_0) \\ r_0 e^{\sigma t}\sin(\omega t + \theta_0) \end{bmatrix} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_0\cos\theta_0 \\ r_0\sin\theta_0 \end{bmatrix}$$

Tanım gereği $x_{30} = r_0\cos\theta_0$ ve $x_{40} = r_0\sin\theta_0$ olduğundan ve daha önce de söylediğimiz gibi her keyfi başlangıç şartı için çözümde başlangıç şartlarının katsayı matrisi $e^{\Lambda t}$ olduğundan,

$$e^{\Lambda t} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

ispatlanmış olur.

Son olarak da $e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1}$ formülüyle e^{At} bulunur. Kökler çakışık olsa da böyledir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} -2 & -36 & -12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 36 & 12 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\big((\lambda-1)(\lambda+3)-(-1)\big) + (-1)\big(36\cdot(-1) - 12(\lambda-1)\big)$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 14\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \quad , \quad \lambda_2 = -1 + j3 \quad , \quad \lambda_3 = -1 - j3$$

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}(\begin{bmatrix} \lambda+2 & 36 & 12 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 36 & 12 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 36 & 12 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda+2 & 12 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda+2 & 12 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda+2 & 36 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda+2 & 36 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda-2 & -36\lambda-96 & -12\lambda-24 \\ 1 & \lambda^2+5\lambda+18 & \lambda+2 \\ \lambda-1 & -\lambda-38 & \lambda^2+\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -2$ için $\mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -2 & -24 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ -3 & -36 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ seçilebilir.

$\lambda_2 = -1 + j3$ için $\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} -12 & -60-j108 & -12-j36 \\ 1 & 5+j9 & 1+j3 \\ -2+j3 & -37-j3 & -11-j3 \end{bmatrix}$

Dikkat edilirse bunun ikinci sütununun ilk sütunun $5+j9$ katı, üçüncü sütunun da ilk sütunun $1+j3$ katı olduğu görülür. Kolaylık için ilk sütunu seçelim. Ama bunun gerçel kısmını V 'nin 2. sütunu, sanal kısmını da V 'nin 3. sütunu olarak alıyoruz (Zaten $\lambda_3 = -1 - j3$ için adjointe baksaydık yukarıdaki son matrisin eşleniğini bulurduk; bu yüzden onunla uğraşmamıza gerek yok):

2. sütun $= \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 3. sütun $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Yani $V = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Tersi ise $V^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & -6/5 & 0 \\ -1/10 & -1/5 & 0 \\ 1/30 & 16/15 & 1/3 \end{bmatrix}$

Köşegen matris $\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ bulunur (İşlem yapmasaydık -3 ile 3'ün yerlerini karıştırabilirdik). Buna göre $\omega = -3$ 'ün işaretine de dikkat ederek

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos 3t & e^{-t}\sin 3t \\ 0 & -e^{-t}\sin 3t & e^{-t}\cos 3t \end{bmatrix}$$

buluruz. $e^{At}=Ve^{\Lambda t}V^{-1}$ formülüyle de e^{At} şöyle bulunur:

$$e^{At}=\begin{bmatrix}2 & -12 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-t}\cos 3t & e^{-t}\sin 3t\\ 0 & -e^{-t}\sin 3t & e^{-t}\cos 3t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/10 & -6/5 & 0\\ -1/10 & -1/5 & 0\\ 1/30 & 16/15 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-2t} & -12e^{-t}\cos 3t & -12e^{-t}\sin 3t\\ -e^{-2t} & e^{-t}\cos 3t & e^{-t}\sin 3t\\ 3e^{-2t} & -2e^{-t}\cos 3t-3e^{-t}\sin 3t & 3e^{-t}\cos 3t-2e^{-t}\sin 3t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/10 & -6/5 & 0\\ -1/10 & -1/5 & 0\\ 1/30 & 16/15 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{6}{5}e^{-t}\cos 3t-\frac{2}{5}e^{-t}\sin 3t & -\frac{12}{5}e^{-2t}+\frac{12}{5}e^{-t}\cos 3t-\frac{64}{5}e^{-t}\sin 3t & -4e^{-t}\sin 3t\\ \frac{1}{10}e^{-2t}-\frac{1}{10}e^{-t}\cos 3t+\frac{1}{30}e^{-t}\sin 3t & \frac{6}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{-t}\cos 3t+\frac{16}{15}e^{-t}\sin 3t & \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t\\ -\frac{3}{10}e^{-2t}+\frac{3}{10}e^{-t}\cos 3t+\frac{7}{30}e^{-t}\sin 3t & -\frac{18}{5}e^{-2t}+\frac{18}{5}e^{-t}\cos 3t-\frac{23}{15}e^{-t}\sin 3t & e^{-t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t\end{bmatrix}$$

Sağlaması $e^{At}=I$ kolayca görülebilir.

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 2\\ -19 & 33 & -83 & 60\\ -9 & 17 & -42 & 30\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$ için e^{At} matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1 & -2\\ 19 & \lambda-33 & 83 & -60\\ 9 & -17 & \lambda+42 & -30\\ 1 & 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^4+8\lambda^3+26\lambda^2+40\lambda+25=0$$

$\rightarrow\ \lambda_1=-2+j\ \ ,\ \ \lambda_2=-2-j\ \ ,\ \ \lambda_3=-2+j\ \ ,\ \ \lambda_4=-2-j$ (Kökler ikişer katlı)

(Eşlenik kökleri peşpeşe olacak şekilde numaraladık.)

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda^3+10\lambda^2+34\lambda+25 & \lambda^2+26\lambda+25 & -\lambda^2-51\lambda-50 & 2\lambda^2+48\lambda+50\\ -19\lambda^2-130\lambda-81 & \lambda^3+41\lambda^2-51\lambda-39 & -83\lambda^2+102\lambda+79 & 60\lambda^2-128\lambda-132\\ -9\lambda^2-65\lambda-56 & 17\lambda^2-26\lambda-39 & \lambda^3-34\lambda^2+52\lambda+79 & 30\lambda^2-48\lambda-82\\ -\lambda^2-9\lambda-25 & -\lambda-25 & \lambda+50 & \lambda^3+7\lambda^2+17\lambda-25\end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 + j$ için $\quad \mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -15 + j5 & \dots & \dots & \dots \\ 122 - j54 & \dots & \dots & \dots \\ 47 - j29 & \dots & \dots & \dots \\ -10 - j5 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

(Rankının 1 olduğunu bilgisayarla hesaplayıp gördüğümüz için bir sütunu yeterli gördük, diğerleri zaten bağımlı. Rankı 2 olsaydı 2 bağımsız sütun bulmamız gerekirdi.)

Buradaki karmaşık özvektöre (ilk sütuna) v_k diyelim. Bir de genelleştirilmiş karmaşık özvektör v_g bulalım:

$$(\lambda_1 I - A)v_g = -v_k \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -4 + j & -1 & 1 & -2 \\ 19 & -35 + j & 83 & -60 \\ 9 & -17 & 40 + j & -30 \\ 1 & 0 & 0 & -1 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \\ v_{g3} \\ v_{g4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - j5 \\ -122 + j54 \\ -47 + j29 \\ 10 + j5 \end{bmatrix}$$

Keyfi olarak $v_{g4} = 0$ seçerek ve bunun çelişkiye yol açmadığını gördükten sonra

$$v_g = \begin{bmatrix} 10 + j5 \\ -552/5 - j36/5 \\ -252/5 - j11/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

buluruz. Şimdi $V = \left[\mathrm{Re}\{v_k\} \quad \mathrm{Im}\{v_k\} \quad \mathrm{Re}\{v_g\} \quad \mathrm{Im}\{v_g\}\right]$ alalım:

$$V = \begin{bmatrix} -15 & -1 & 10 & 5 \\ 122 & -54 & -552/5 & -36/5 \\ 47 & -29 & -252/5 & -11/5 \\ -10 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} -6/25 & -23/50 & 24/25 & -21/25 \\ 12/25 & 23/25 & -48/25 & 37/25 \\ -1/2 & -47/50 & 97/50 & -8/5 \\ 0 & -21/50 & 23/25 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = V^{-1}AV = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \Lambda_k & I_2 \\ 0_2 & \Lambda_k \end{bmatrix}$$

Sağ üstteki 2×2 blokun birim matris (I_2), sol üst ve sağ alt 2×2 blokların da karmaşık özdeğer için bulunan 2×2 blok (Λ_k) olduğuna dikkat ediniz. $\omega = -1$'in işaretine de dikkat ederek

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda_k t} & \frac{t}{1!} e^{\Lambda_k t} \\ 0_2 & e^{\Lambda_k t} \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & -t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

buluruz. Son olarak da $e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1}$ formülüyle e^{At} şöyle bulunur:

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos t - \frac{7}{2}\sin t + \frac{15}{2}t\cos t + \frac{5}{2}t\sin t & -11\sin t + 12t\cos t + 11t\sin t & \frac{47}{2}\sin t - \frac{49}{2}t\cos t - \frac{47}{2}t\sin t & -18\sin t + 20t\cos t + 20t\sin t \\ 42\sin t - 61t\cos t - 27t\sin t & \cos t + 127\sin t - 92t\cos t - 102t\sin t & -270\sin t + 187t\cos t + 217t\sin t & 212\sin t - 152t\cos t - 184t\sin t \\ \frac{29}{2}\sin t - \frac{47}{2}t\cos t - \frac{29}{2}t\sin t & 49\sin t - 32t\cos t - 47t\sin t & \cos t - \frac{209}{2}\sin t + \frac{129}{2}t\cos t + \frac{199}{2}t\sin t & 82\sin t - 52t\cos t - 84t\sin t \\ -6\sin t + 5t\cos t - \frac{5}{2}t\sin t & -\frac{23}{2}\sin t + \frac{23}{2}t\cos t - \frac{1}{2}t\sin t & 24\sin t - 24t\cos t + \frac{1}{2}t\sin t & \cos t - 19\sin t + 20t\cos t \end{bmatrix}$$