2. DİNAMİK SİSTEM TEORİSİ

2.1. Dinamik Sistem Gösterimi (dsg)

Tanım: Bir dsg şöyle bir altılıdır: $(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$
ki burada:

T: İlgilenilen zaman aralığını ifade eder. Gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. Sürekli zaman sistemleri için $T = \mathbb{R}$ veya $T = \mathbb{R}^+ \triangleq [0, \infty)$ olabilir. Kesikli zaman sistemleri için $T = \mathbf{I}$ (tamsayılar kümesi) veya $T = \mathbf{I}^+ \triangleq \{0, 1, 2, \ldots\}$ olabilir.

$\mathcal{U}$: Geçerli giriş fonksiyonlarının kümesidir. Girişlerin değer kümesini U ile gösterir ve $\mathcal{F}(T, U) \triangleq \{f \mid f: T \to U\}$ (Yani T'yi U'ya bağlayan fonksiyonlar kümesi) olarak tanımlarsak, $\mathcal{U}$ bu kümenin alt kümesidir:

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(T, U)$$

(Dikkat: $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ise $u(t) \in U \quad \forall t \in T$ için)

$\mathcal{Y}$: Çıkış fonksiyonlarının kümesidir. Çıkışların değer kümesini Y ile gösterirsek

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}(T, Y) = \{f \mid f: T \to Y\}$$

(Dikkat: $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ ise $y(t) \in Y \quad \forall t \in T$ için)

Σ: Durumların kümesidir. x gibi her bir elemanına $(x \in \Sigma)$ bir "durum" denir. $\forall t \in T$ için $x(t) \in \Sigma$ ve $x(t)$'ye "t'de hesaplanan durum" denir.

s: Durum geçiş fonksiyonudur. Verilen $t_0, t \in T$; $x_0 \in \Sigma$ ve $u \in \mathcal{U}$ için

$$s(t, t_0, x_0, u) \triangleq x(t) \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

$$s: T \times T \times \Sigma \times \mathcal{U} \to \Sigma$$

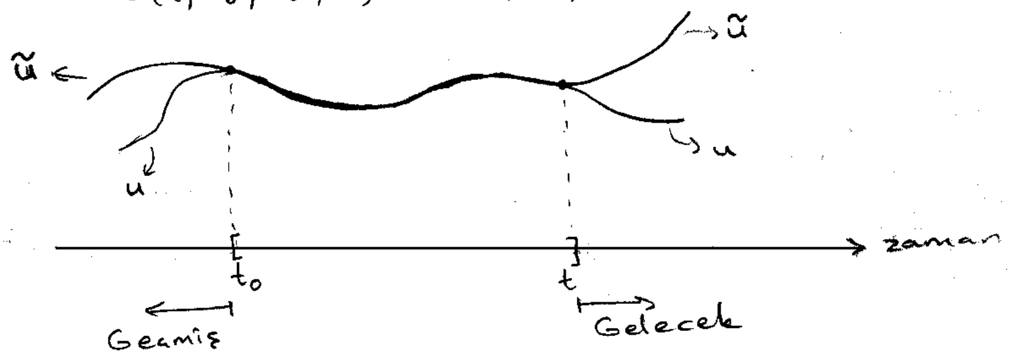
(Hatırlatma: U ve V gibi iki kümenin kartezyen çarpımı
$U \times V \triangleq \{(u,v) \mid u \in U \text{ ve } v \in V\}$ olarak tanımlanır)

Durum geçiş fonksiyonu s 'in anlamı, $u \in \mathcal{U}$ vasıtasıyla t_0 anındaki $x_0 \triangleq x(t_0)$ gibi bir durumdan t anında $x(t)$ durumuna ulaşılacağıdır.

Durum geçiş fonksiyonu şu iki kabulü sağlamalıdır:

1) Durum geçiş kabulü
$u, \tilde{u} \in \mathcal{U}$ öyle iki farklı giriş fonksiyonu olsun ki
$\forall t' \in [t_0, t]$ için $u(t') = \tilde{u}(t')$ olsun,
fakat bazı $t' \notin [t_0, t]$ için $u(t') \neq \tilde{u}(t')$ olabilsin.
Bu kabule göre

$$s(t, t_0, x_0, u) = s(t, t_0, x_0, \tilde{u})$$

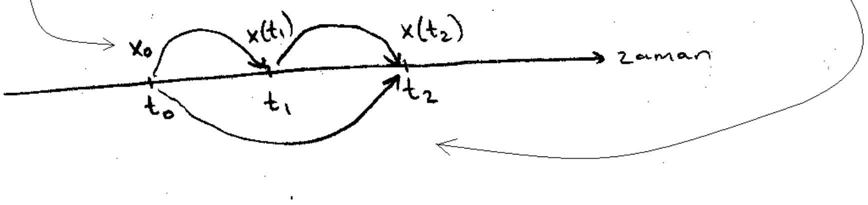


Bazı $t' > t$ için $u(t') \neq \tilde{u}(t')$ olsa bile $s(t, t_0, x_0, u) = s(t, t_0, x_0, \tilde{u})$ olmasının anlamı, girişin gelecekteki değerlerinin şu andaki büyüklükler üzerinde etkisi olmamasıdır.

Bazı $t' < t_0$ için $u(t') \neq \tilde{u}(t')$ olsa bile $s(t, t_0, x_0, u) = s(t, t_0, x_0, \tilde{u})$ olmasının anlamı, t_0 'dan önceki bütün geçmişin, $x_0 \triangleq x(t_0)$ tarafından özetlendiğidir.

2) Yarı-grup kabulü:
$t_0, t_1, t_2 \in T$ ve $u \in \mathcal{U}$ olsun.

$$s(t_2, t_1, s(t_1, t_0, x_0, u), u) = s(t_2, t_0, x_0, u)$$

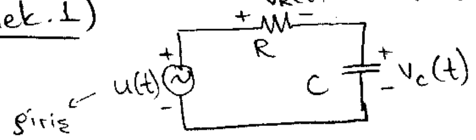


r : Ölçülen (okunan) çıkış bağıntısı. $r: T \times \Sigma \times U \longrightarrow Y$ olup

$$y(t) = r(t, x(t), u(t))$$ olacak şekilde tanımlanır.

r belleksiz bir fonksiyondur; çünkü belirli bir $t \in T$ anı için sadece t, $x(t)$ ve $u(t)$ değerlerine bağlıdır. (Geçmiş veya gelecekteki x veya u değerlerinden bağımsızdır.)

Örnek 1) $v_R(t) \rightarrow$ çıkış olsun.



$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v_c(t) + \frac{1}{RC} u(t)$$

$T = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

Bu dsg 'nin durumu sığaç voltajı $v_c(t)$ olsun:

$x(t) \triangleq v_c(t)$, $\Sigma = \mathbb{R}$

$t_0, t_1 \in T$ ve $t_1 > t_0$ olsun.

$$x(t_1) \triangleq s(t_1, t_0, x_0, u) = e^{-\frac{t_1 - t_0}{RC}} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - \tau)} \cdot \frac{1}{RC} u(\tau)\, d\tau$$

olur. Kabullerin sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

(i) Durum geçiş kabulü:

$\tilde{u}$ diğer bir giriş fonksiyonu olsun, şöyle ki:

$t \in [t_0, t_1]$ için $\tilde{u}(t) = u(t)$

$t \notin [t_0, t_1]$ için $\tilde{u}(t) \neq u(t)$ olsun.

u sadece $\tau: t_0$ 'dan t_1'e integral aralığında $u(\tau)$ şeklinde görüldüğünden

$$s(t_1, t_0, x_0, u) = s(t_1, t_0, x_0, \tilde{u}) \quad \checkmark$$

(ii) Yarı grup kabulü:

$t_0, t_1, t_2 \in T$ ve $t_2 > t_1 > t_0$ olsun.

$$s(t_2, t_0, x_0, u) = e^{-\frac{t_2 - t_0}{RC}} x_0 + \int_{t_0}^{t_2} e^{-\frac{1}{RC}(t_2 - \tau)} \cdot \frac{1}{RC} u(\tau)\, d\tau$$

$$s(t_2, t_1, s(t_1, t_0, x_0, u), u) = s(t_2, t_1, x(t_1), u)$$

$$= e^{-\frac{t_2 - t_1}{RC}} x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{RC}(t_2 - \tau)} \frac{1}{RC} u(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}}\left[e^{-\frac{t_1-t_0}{RC}}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t_1-\tau}{RC}}\frac{1}{RC}u(\tau)d\tau\right] + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t_2-\tau}{RC}}\frac{1}{RC}u(\tau)d\tau$$

$$= e^{-\frac{t_2-t_0}{RC}}x_0 + \int_{t_0}^{t_2} e^{-\frac{t_2-\tau}{RC}}\frac{1}{RC}u(\tau)d\tau = s(t_2,t_0,x_0,u) \quad \checkmark$$

İki kabul de sağlanıyor.

Çıkış ölçümü:

$$r(t,x(t),u(t)) \triangleq v_R(t) = u(t)-x(t)$$

Buradaki: $(T,\mathcal{U},\mathcal{Y},\Sigma,s,r)$ bir dsg 'dir.

İstenirse meselâ $T'=[0,100]$ gibi belirli bir zaman aralığıyla ilgilenilerek başka bir dsg elde edilebilir.

Diğer bir dsg de şöyle elde edilebilir:

$$\hat{x}(t) \triangleq \arctan(v_c(t)) \longrightarrow \hat{\Sigma} = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{s}(t_1,t_0,\hat{x}_0,u) = \arctan\left[e^{-\frac{t_1-t_0}{RC}}\tan\hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t_1-\tau}{RC}}\frac{1}{RC}u(\tau)d\tau\right]$$

Bu fonksiyonun iki kabulü de sağladığını gösteriniz.

$$\hat{r}(t,\hat{x}(t),u(t)) \triangleq v_R(t) = u(t) - \tan x(t) \quad \text{olsun.}$$

$(T,\mathcal{U},\mathcal{Y},\hat{\Sigma},\hat{s},\hat{r})$ diğer bir dsg olacaktır.

Örnek. 2) İki flip-flop un, ikili sayıcı oluşturacak şekilde kullanılmasıyla oluşturulan sistem:

Buradaki: FF'lar, girişinde 1 varsa durum değiştiriyor (toggle),

$\oplus$: Mantıksal "veya" , $\odot$: Mantıksal "ve"

(Yani

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

)

ve tümleyen $\bar{0}=1$, $\bar{1}=0$ olsun.

$T=\{0,1,2,\dots\}\triangleq I^+$

$U=\{0,1\}$

$\mathcal{U}$: "0" ve "1" lerden oluşan mümkün olan bütün diziler

(Mesela $0010011\ldots \in \mathcal{U}$)

$Y = \{0, 1\}$

$\mathcal{Y}$ - "0" ve "1" lerden oluşan mümkün olan bütün diziler.

X_n^1 ve X_n^2 durumları, sırasıyla FF_1 ve FF_2 'nin n anındaki çıkışları olsun. Sistem için n anındaki durum vektörü

$$x_n \triangleq \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{bmatrix}$$ olarak tanımlanırsa

$$\Sigma = \{0,1\} \times \{0,1\}$$ olur.

↳ kartezyen çarpım

Durum geçiş fonksiyonu

$$x_{n+1} = s(n+1, n, x_n, u)$$

$$X_{n+1}^1 = (X_n^1 \odot \bar{u}_n) \oplus (\bar{X}_n^1 \odot u_n)$$

$$X_{n+1}^2 = \left(X_n^2 \odot \left(\overline{u_n \odot X_n^1}\right)\right) \oplus \left(\overline{X_n^2} \odot (u_n \odot X_n^1)\right)$$

şöyle olur:

u_n	X_n^1	$X_n^1 \odot \bar{u}_n$	$\bar{X}_n^1 \odot u_n$	X_{n+1}^1
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

$u_n = 0$ ise $X_{n+1}^1 = X_n^1$

$u_n = 1 \Rightarrow X_{n+1}^1 = \bar{X}_n^1$

$$s\left(n+1, n, \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{bmatrix}, u\right) = \begin{bmatrix} X_{n+1}^1 \\ X_{n+1}^2 \end{bmatrix}$$

Kabullerin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

(i) Yarı-grup kabulü:

$x_{n+k} = s(n+k, n, x_n, u)$ değeri, 1 adımlık durum geçiş fonksiyonunu k defa kullanarak

$$x_n \rightarrow x_{n+1} \rightarrow x_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+k}$$

biçiminde hesaplandığından (kesirli adım olmadığından ve tamsayılarda atlama olmadığından) yarı-grup kabulünün sağlandığı açıktır.

(ii) Durum geçiş kabulü:

$x_{n+1} = s(n+1, n, x_n, u)$ hesabında yalnızca u_n değeri

$x_{n+2} = s(n+2, n+1, x_{n+1}, u)$ " " u_{n+1} "

⋮

$x_{n+k} = s(n+k, n+k-1, x_{n+k-1}, u)$ " " u_{n+k-1} "

gerekmektedir. Dolayısıyla $m = n+k$ için

$x_m = s(m, n, x_n, u)$ değerini hesaplamak için yalnızca $u_n, u_{n+1}, \dots, u_m$ değerleri gerektiğinden bu kabul de sağlanmaktadır.

Ölçülen çıkış bağıntısı:

$$r(n, x_n, u_n) = x_n^2$$

Bu dinamik sistemin gösterimi: $(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$

Örnek. 3) Verilen bir Türkçe metin, her zaman adımında sıradaki bir harf veya bir boşluk karakteri (* ile gösterelim) alınarak okunuyor. Başka karakter kullanılmamış ve kelimeler * ile ayrılmıştır. Son okuma anından öncesinde

Okunmuş toplam kelime sayısını ve

"ç" harfi ile biten okunmuş kelime sayısını

iki çıkış olarak veren bir sistem düşünelim. Bu sistem için bir dsg bulalım:

$$T = I^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$U = \{a, b, c, ç, \dots, z, *\}$$

$\mathcal{U}$ = Mümkün olan bütün Türkçe metinler (yukarıdaki şartlarla)

y_n^1 : n-1 anına kadar okunmuş kelime sayısı

y_n^2 : n-1 anına kadar okunmuş "ç" ile biten kelime sayısı

$$y_n \triangleq \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{bmatrix} \quad : \text{çıkış vektörü.}$$

$y_n^1 \in I^+$, $y_n^2 \in I^+$ olduğundan

$$Y = I^+ \times I^+$$

Önce şu iki durum değişkenini tanımlayalım:

$$x_{n+1}^1 \triangleq \begin{cases} 1 & u_n = * \text{ ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

$$x_{n+1}^2 \triangleq \begin{cases} 1 & u_n = ç \text{ ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

n-1 anına kadar okunmuş kelime sayısını x_n^3 durum değişkeni olarak tanımlarsak:

$$x_{n+1}^3 \triangleq x_n^3 + \underbrace{x_n^1 (1 - x_{n-1}^1)}$$ olur.

Bu terim, üstüste * gelmesi durumlarını saymamaya yarar.

Burada n+1 anındaki değer, hem n hem de n-1 anındaki durumlara bağlıdır. Halbuki durum vektörü bütün geçmişi özetlemelidir. Bu yüzden şöyle bir x_n^4 durum değişkeni daha tanımlarız:

$$x_{n+1}^4 \triangleq 1 - x_n^1$$

Böylece

$$x_{n+1}^3 = x_n^3 + x_n^1 x_n^4 \quad \text{olur.}$$

n-1 anına kadar okunmuş "a" ile biten kelime sayısını x_n^5 durum değişkeni olarak tanımlarsak:

$$x_{n+1}^5 \triangleq x_n^5 + x_n^1 x_{n-1}^2$$

Benzer nedenle x_n^6 durum değişkeni şöyle tanımlanır:

$$x_{n+1}^6 \triangleq x_n^2$$

Böylece

$$x_{n+1}^5 = x_n^5 + x_n^1 x_n^6$$

Durum vektörü $x_n \triangleq \begin{bmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^6 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanırsa:

$$x_{n+1} = s(n+1, n, x_n, u) = \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^3 \\ x_{n+1}^4 \\ x_{n+1}^5 \\ x_{n+1}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{cases} 1 & \text{eğer } u_n = * \text{ ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases} \\ \begin{cases} 1 & \text{eğer } u_n = a \text{ ise} \\ 0 & \text{değilse} \end{cases} \\ x_n^3 + x_n^1 x_n^4 \\ 1 - x_n^1 \\ x_n^5 + x_n^1 \cdot x_n^6 \\ x_n^2 \end{bmatrix} \quad : \text{durum geçiş fonksiyonu}$$

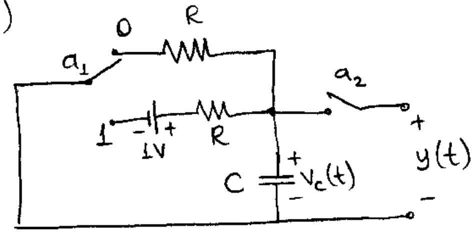
Buna göre $\Sigma = \{1,0\} \times \{1,0\} \times I^+ \times \{0,1\} \times I^+ \times \{0,1\}$ olur.

Ölçülen çıkış ise

$$y_n = r(n, x_n, u_n) = \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n^3 \\ x_n^5 \end{bmatrix}$$

Sistemin dsg : $(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$

Örnek 4)



a_1 anahtarı yalnızca 0, 1, 2, ... anlarında konum değiştirebilmektedir.

a_2 anahtarı ise 0, 1, 2, ... anlarında bir an için kapanıp açılarak $v_c(t)$ 'den örnekleme halinde $y(t)$ çıkışı elde edilmesini sağlamaktadır.

Giriş ise a_1 anahtarının konumu olarak tanımlanıyor.

$T = I^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$U = \{0, 1\}$

$\mathcal{U}$ = "0" ve "1" lerden oluşan mümkün olan bütün diziler.

Mesela 01001110... $\in \mathcal{U}$

$Y = [0, 1]$ (birimi volt)

$\mathcal{Y}$: $[0,1]$ aralığındaki gerçel sayılardan oluşan mümkün olan bütün diziler.

n anındaki durum $x_n \triangleq v_c(n)$ olarak tanımlanıyor.

$$x_{n+1} = s(n+1, n, x_n, u) = e^{-\frac{(n+1-n)}{RC}} x_n + \int_n^{n+1} e^{-\frac{(n+1-\tau)}{RC}} \frac{u_n}{RC} \, d\tau$$

0V veya 1V

Yarı grup kabulü sağlanır; çünkü

$x_n \to x_{n+1} \to \dots \to x_{n+k}$ birer adımlarla bulunuyor.

Durum geçiş kabulü de sağlanır; çünkü x_n 'den x_{n+k} 'yı bulmak için yalnızca $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}$ giriş değerleri gerekmektedir.

Son olarak $r(n, x_n, u_n) = x_n$

Örnek 5) İdeal geciktirici

τ: ölü zaman (gecikme süresi)

$T = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

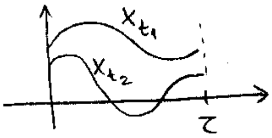
$Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$y(t)=r(t,x(t),u(t))$ belleksiz olmalı. Ayrıca $x(t)$, t'den önceki bütün geçmişi özetlemelidir. Ancak $y(t)=u(t-\tau)$ olduğu için genel olarak bunlar, $x(t)$'nin sonlu boyutlu olmasıyla mümkün olmaz.

$x(t)$ durumlarını her t anı için farklı birer fonksiyon (X_t) olarak tanımlayabiliriz.

$$\Sigma = \mathcal{F}([0,\tau],\mathbb{R}) \triangleq \{ f \mid f:[0,\tau] \to \mathbb{R} \}$$ olsun.

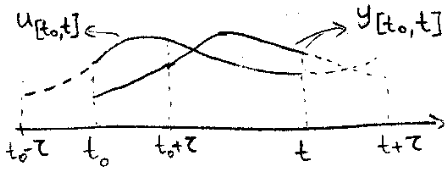
Yani



$x_{t_1}, x_{t_2} \in \Sigma$

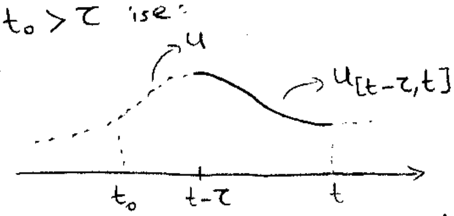
herbiri bir fonksiyon.

Ayrıca, $u_{[t_0,t]}$, u'nun $[t_0,t]$ aralığındaki kısmı olarak tanımlansın. $y(t)$'nin belirlenebilmesi için $u_{[t_0,t]}$'den başka $u_{[t_0-\tau,t_0]}$'ın da bilinmesi gerekir.

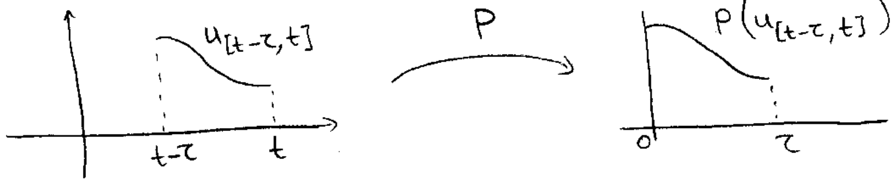


Durum geçiş fonksiyonu için iki bölge vardır:

(i) $t-t_0>\tau$ ise:



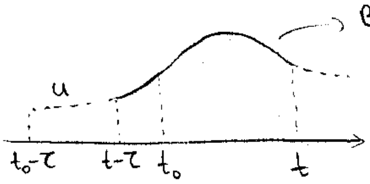
Öyle bir P dönüşümü tanımlayalım ki fonksiyonu şöyle kaydırsın:



Dikkat: $x_t(0)=u(t-\tau)$

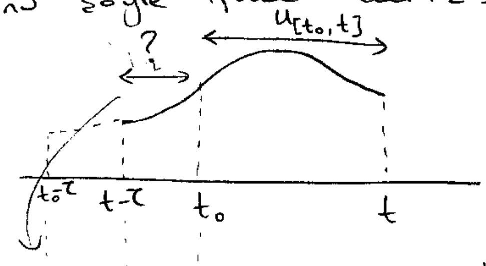
$t-t_0>\tau$ için $x_t=P(u_{[t-\tau,t]})$ olarak tanımlıyoruz.

(ii) $t-t_0<\tau$ ise:

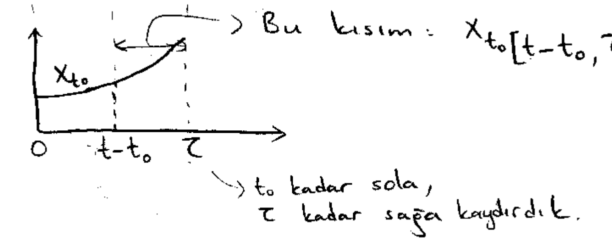


Bu kısmın sıfırdan başlıyacak şekilde kaydırılmışını x_t olarak tanımlamak istiyoruz. Ancak t_0'dan önceki anlara ait giriş(u) değerlerini kullanmamalıyız. Bunun yerine x_{t_0} başlangıç değerini (fonksiyon) kullanabiliriz.

Bunu şöyle ifade ederiz:



Bu kısım x_{t_0}'ın parçasıdır. Ama x_{t_0}, $[0,\tau]$ aralığında tanımlıdır.



O halde $t-t_0<\tau$ için $x_t = P\left(x_{t_0[t-t_0,\tau]} \circ u_{[t_0,t]}\right)$

Buradaki "$\circ$" işlemi fonksiyon parçalarını ucuca eklemek olarak tanımlanıyor. P dönüşümü ise, fonksiyonu, tanım aralığı sıfırdan başlayacak şekilde bütün olarak kaydırmak olarak tanımlanmıştı.

$$s(t,t_0,x_0,u) = x_t \in \Sigma$$

$y(t) = r(t, x_t, u(t)) \triangleq x_t(0)$ ki bu da $u(t-\tau)$'dur.

Sistemin dsg'i $(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$.

2.2. Cevap (tepki) Fonksiyonu:

Cevap fonksiyonu $\rho : T \times T \times \Sigma \times \mathcal{U} \longrightarrow Y$ biçiminde bir bağıntı olup

$$\rho(t,t_0,x_0,u) \triangleq r(t, x(t), u(t))$$

olarak tanımlanır. Yani

$$y(t) = \rho(t,t_0,x_0,u) \in Y$$

$$y(\cdot) = \rho(\cdot,t_0,x_0,u) \in \mathcal{Y}.$$

2.3. Denklik:

D ve $\bar{D}$, aynı $T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ kümelerine sahip iki dsg olsunlar. Yani $D(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$ ve $\bar{D}(T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \bar{\Sigma}, \bar{s}, \bar{r})$

2.3.1. Tanım: $x \in \Sigma$ durumu, t_0 anında $\bar{x} \in \bar{\Sigma}$ durumuna ancak ve eğer $\forall t \geq t_0$ ve $\forall u \in \mathcal{U}$ için

$$\rho(t, t_0, x, u) = \bar{\rho}(t, t_0, \bar{x}, u)$$

ise **denktir** denilir.

2.3.2. Tanım: D ve $\bar{D}$ dsg 'lerinin denk oldukları söylenir ancak ve eğer

(i) Aynı $T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ kümelerine sahipseler ve

(ii) $\forall x \in \Sigma$ ve $\forall t_0 \in T$ için t_0 anında x'e denk olan bir $\bar{x} \in \bar{\Sigma}$ mevcut ise.

(Bu denkliği $D \sim \bar{D}$ ile göstereceğiz.)

2.3.3. Tanım: Bir dsg 're ($\bar{D}$ diyelim) denk olan bütün dsg 'lerinin kümesine D_s diyelim:

$$D_s \triangleq \{D \mid D \sim \bar{D}\}$$

D_s, "dinamik sistem" olarak adlandırılır. Yani dsg 'lerinin bir denklik sınıfıdır.

Dikkat:

(i) $D_1 \in D_s$ için, $D_1 \sim D_1$ (yansımalı)

(ii) $D_1, D_2 \in D_s$ için $D_1 \sim D_2 \Rightarrow D_2 \sim D_1$ (simetrik)

(iii) $D_1, D_2, D_3 \in D_s$ için $D_1 \sim D_2$ ve $D_2 \sim D_3 \Rightarrow D_1 \sim D_3$ (geçişli)

Örnek:

$T = [0, \infty)$, $U = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{f \mid f : [0, \infty) \to \mathbb{R}\}$

Aynı $T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ kümelerine sahip, $D : (T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \Sigma, s, r)$ ve $\bar{D} : (T, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \bar{\Sigma}, \bar{s}, \bar{r})$ dsg 'lerini ele alalım.

D için:

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \Sigma = \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ y(t) &\triangleq x_2(t) \end{aligned}$$

ve $\bar{D}$ için:

$$\bar{x}(t) \in \bar{\Sigma} = \mathbb{R} \longrightarrow \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t) + u(t) \\ \bar{y}(t) \triangleq \bar{x}(t) \end{array}$$

olsun. D ve $\bar{D}$ denk midir?

(i) D ve $\bar{D}$ aynı $T, \mathcal{U}$ ve $\mathcal{Y}$'ye sahiptir.

(ii) $x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$ olsun.

$$y(t) = \rho(t, t_0, x(t_0), u) = e^{-(t-t_0)} x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

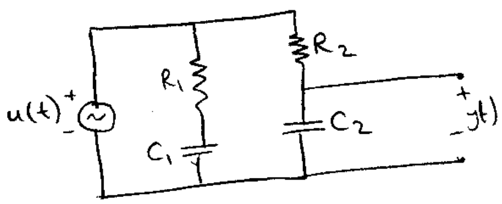
$$y(t) = \bar{\rho}(t, t_0, \bar{x}_0, u) = e^{-(t-t_0)} \bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Yani $x_2(t_0) = \bar{x}_0 \implies \rho(t, t_0, x(t_0), u) = \bar{\rho}(t, t_0, \bar{x}_0, u)$ olmaktadır.

Buna göre $x(t_0) = \begin{bmatrix} \alpha \text{ önemsiz} \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$ durumu, t_0 anında $\bar{x}_0 \triangleq x_2(t)$ durumuna denktir.

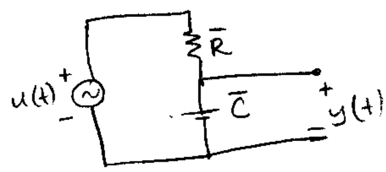
Bu her $t_0 \in T$ ve $x(t_0) = \Sigma$ için geçerli olduğundan D ile $\bar{D}$ denktirler. Bunlar şöyle elektrik devreleri olabilirler:

$\underline{D}$



$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$
$C_1 = C_2 = 1F$, $x_1 = V_{C1}$
$x_2 = V_{C2}$
$y = V_{C2} = x_2$

$\underline{\bar{D}}$



$\bar{R} = 1\,\Omega$, $\bar{x} = V_{\bar{C}}$
$\bar{C} = 1F$ $y(t) = V_{\bar{C}} = \bar{x}$

2.4. Zamanla Değişmezlik

2.4.1. Tanım: Bir dsg, ancak ve eğer

(i) $\mathcal{U}$, zamanda ötelenmeye göre kapalı bir küme ise, yani $\forall u \in \mathcal{U}$ için $u_\tau(t) \triangleq u(t-\tau)$ olarak tanımlarsak (τ keyfi bir sabit) $u_\tau \in \mathcal{U}$ ise,

ve

(ii) $\forall t \geqslant t_0$, $\forall x_0 \in \Sigma$, $\forall u \in \mathcal{U}$ için

$$\rho(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\tau) = \rho(t, t_0, x_0, u) \quad \text{ise}$$

"zamanla değişmezdir" denilir.

Örnek: $\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$
$y(t) = x(t)$

$T = \mathbb{R}$, $U = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\Sigma = \mathbb{R}$

$$s(t, t_0, x_0, u) = x(t) = e^{-2(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-p)} u(p)\, dp$$

$$r(t, x(t), u(t)) = x(t)$$

$$\rho(t, t_0, x_0, u) \triangleq r(t, x(t), u(t)) = x(t)$$

$$\rho(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\tau) = e^{-2(t+\tau-t_0-\tau)} x_0 + \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} e^{-2(t+\tau-p)} u(p-\tau)\, dp$$

$q = p - \tau$ olsun.

$$\rho(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\tau) = e^{-2(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-q)} u(q)\, dq$$

$$= \rho(t, t_0, x_0, u)$$

olduğundan, bu dsg zamanla değişmezdir.

2.4.2. Tanım: Bir dinamik sistem için en az bir tane zamanla değişmez dsg mevcutsa bu dinamik sistemin zamanla değişmez olduğu söylenir.

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + e^{2t}u(t) \\ y(t) &= \underbrace{e^{-2t}x(t) + u(t)}_{r(t,x(t),u(t))} \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemin dsg D

$T = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$\Sigma = \mathbb{R}$

$$x(t) = s(t,t_0,x_0,u) = e^{(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-p)} \cdot e^{2p}u(p)dp$$

$$y(t) = \rho(t,t_0,x_0,u) = e^{-(t+t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-p)}u(p)dp + u(t)$$

$$\rho(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\tau) = e^{-(t+t_0+2\tau)}x_0 + \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-p)}u(p-\tau)dp + u(t-\tau)$$

Bu ikisi farklıdır. Meselâ $u = 0_{\mathcal{U}}$ ve $t = t_0 = 0$ için

$$\rho(0,0,x_0,0_{\mathcal{U}}) = x_0$$
$$\rho(\tau,\tau,x_0,0_{\mathcal{U}}) = e^{-2\tau}x_0$$
$\neq$

Bu yüzden D zamanla değişmez değildir.

Ancak, durum değişkenini şöyle farklı bir şekilde tanımlarsak:

$$z(t) \triangleq e^{-2t}x(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= e^{-2t}\dot{x}(t) - 2e^{-2t}x(t) \\ &= e^{-2t}\left(x(t) + e^{2t}u(t)\right) - 2e^{-2t}x(t) \\ &= -e^{-2t}x(t) + u(t) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -z(t) + u(t) \\ y(t) &= \underbrace{z(t) + u(t)}_{\bar{r}(t,z(t),u(t))} \end{aligned}\right\}$$

Yeni dsg: $\bar{D}$

$\bar{T} = \mathbb{R}$, $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{Y}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$\bar{\Sigma} = \mathbb{R}$

$$z(t) = \bar{s}(t,t_0,z_0,u) = e^{-(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-p)}u(p)dp$$

$$y(t) = \bar{\rho}(t,t_0,z_0,u) = e^{-(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-p)}u(p)dp + u(t)$$

$=$

$$\bar{\rho}(t+\tau,t_0+\tau,z_0,u_\tau) = e^{-(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-p)}\underbrace{u(p-\tau)}_{u_\tau(p)}dp + \underbrace{u(t)}_{u_\tau(t+\tau)}$$

$\bar{D}$ zamanla değişmez bir dsg 'dir.

D ve $\bar{D}$ denktir; çünkü

$z_0 = e^{-2t_0} x_0 \iff t_0$ anında $x_0 \in \Sigma$ durumu $z_0 \in \bar{\Sigma}$ durumuna denktir, $(\varphi(t,t_0,x_0,u) = \bar{\varphi}(t,t_0,z_0,u))$ ve bu her $t_0 \in T$ ve $\forall x \in \Sigma$ için geçerlidir.

D 'ye denk olan en az bir tane zamanla değişmez dsg ($\bar{D}$) bulunduğu için bu dinamik sistem zamanla değişmezdir.

2.5. Doğrusallık:

2.5.1. Tanım: Bir dsg 'nde ancak ve eğer

(i) $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ ve Σ aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ise, ve

(ii) Cevap fonksiyonu $\forall t \geq t_0$, $\forall x_{01}, x_{02} \in \Sigma$, $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ için

$$\varphi(t,t_0,\alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02}, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(t,t_0,x_{01},u_1) + \alpha_2 \varphi(t,t_0,x_{02},u_2)$$

şartı sağlanıyorsa, bu dsg 'nin doğrusal olduğu söylenir.

Diğer bir deyişle bir dsg 'nin doğrusal olması, belirli $t, t_0 \in T$ için

$$(x_0, u) \in \Sigma \times \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(t,t_0,x_0,u) \in Y$$

bağıntısının doğrusal olması anlamına gelir.

2.5.2. Tanım: Bir dinamik sistem, ancak ve eğer en az bir doğrusal dsg mevcutsa "doğrusaldır" denilir.

2.6. Kartezyen çarpım uzaylarında tanımlı doğrusal fonksiyonların ayrıştırılması:

U ve V, aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları olsun. U ve V 'nin kartezyen çarpımı şöyle bir küme olarak tanımlanır:

$$W = U \times V = \{(u,v) \mid u \in U,\ v \in V\}$$

W üzerinde vektörel toplama ve skaler çarpma işlemlerini şöyle tanımlayalım:

$$\underbrace{w_1 + w_2}_{W\text{'da vektörel toplama}} = (\overset{w_1}{u_1, v_1}) + (\overset{w_2}{u_2, v_2}) \triangleq (\underbrace{u_1 + u_2}_{U\text{'da}},\ \underbrace{v_1 + v_2}_{V\text{'de}})$$

$\alpha \in F$ olmak üzere $\underbrace{\alpha \cdot w = \alpha \cdot (u,v)}_{W\text{'de skaler çarpma}} \triangleq (\underbrace{\alpha \cdot u}_{U\text{'da}},\ \underbrace{\alpha \cdot v}_{V\text{'de}})$

Buna göre $W = U \times V$ kümesi, tanımlanan bu vektörel toplama ve skaler çarpma işlemleriyle birlikte, F üzerinde tanımlı bir vektör uzayıdır. (Açıkça görülmektedir)

Aynı F üzerinde tanımlı bir Y vektör uzayı ve $\mathcal{A} : W \to Y$ biçiminde bir doğrusal dönüşüm düşünelim. $\mathcal{A}$ doğrusal olduğundan, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ ve $\forall w_1, w_2 \in W$ için:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(w_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(w_2)$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1 (u_1, v_1) + \alpha_2 (u_2, v_2)) = \mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$
$$= \alpha_1 \mathcal{A}(u_1, v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(u_2, v_2)$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $u_1 = u$, $u_2 = 0_U$, $v_1 = 0_V$, $v_2 = v$ alırsak:

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(u, 0_V) + \mathcal{A}(0_U, v)$$

2.6.1. İddia: Hem $\mathcal{A}(\cdot, 0_V) : U \to Y$ hem de $\mathcal{A}(0_U, \cdot) : V \to Y$ bağıntıları doğrusal birer dönüşümdür.

İspat: $\mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0_V) = \mathcal{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 0_V + \alpha_2 0_V)$
$= \alpha_1 \mathcal{A}(u_1, 0_V) + \alpha_2 \mathcal{A}(u_2, 0_V)$

Yani $\mathcal{A}(\cdot, 0_V)$ doğrusaldır. Benzer şekilde $\mathcal{A}(0_U, \cdot)$ da doğrusaldır.

2.7. Sistem cevap fonksiyonunun ayrıştırılması:

D doğrusal bir dsg olsun. Belirli $t, t_0 \in T$ için
$\rho(t, t_0, \cdot, \cdot) : \Sigma \times \mathcal{U} \to Y$ biçiminde doğrusal bir dönüşümdür.

Dolayısıyla $x_0 \in \Sigma$ ve $u \in \mathcal{U}$ için
$\rho(t, t_0, x_0, u) = \rho_{sg}(t, t_0, x_0, 0_{\mathcal{U}}) + \rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, u)$
biçiminde ayrıştırılabilir. Burada

$\rho_{sg}(t, t_0, \cdot, 0_{\mathcal{U}}) : \Sigma \to Y$ sistemin sıfır giriş cevap fonksiyonu,

$\rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, \cdot) : \mathcal{U} \to Y$ sistemin sıfır durum cevap fonksiyonu

olarak adlandırılırlar.

Bu iki dönüşüm de doğrusal birer dönüşümdür. Yani

(i) $\rho_{sg}(t, t_0, \alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02}, 0_{\mathcal{U}}) = \alpha_1 \rho_{sg}(t, t_0, x_{01}, 0_{\mathcal{U}}) + \alpha_2 \rho_{sg}(t, t_0, x_{02}, 0_{\mathcal{U}})$

(ii) $\rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, u_1) + \alpha_2 \rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, u_2)$

Bu ifadeye "üstüste bindirme (süperpozisyon) ilkesi" denir.

Örnek:
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ y(t) &= \underbrace{-x(t)}_{r(t, x(t), u(t))} \end{aligned}\right\}$$
sistemi için D dsg:
$T = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
$\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Burada Σ, $\mathcal{U}$ ve Y kümeleri, $F = \mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzaylarıdır.

$$x(t) = s(t, t_0, x_0, u) = e^{-(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

$$\rho(t, t_0, x_0, u) = -e^{-(t-t_0)} x_0 - \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

$$\rho_{sg}(t, t_0, x_0, 0_{\mathcal{U}}) = -e^{-(t-t_0)} x_0$$
$$\rho_{sd}(t, t_0, 0_\Sigma, u) = -\int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

Uyarı: Süperpozisyon ilkesi, sıfırdan farklı başlangıç durumları için geçerli değildir.
$\rho(t, t_0, x_0, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \neq \alpha_1 \rho(t, t_0, x_0, u_1) + \alpha_2 \rho(t, t_0, x_0, u_2)$