$$C(t) = \left[\frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial x_1(t)} \quad \frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial x_2(t)} \right] = \left[x_2(t) \quad x_1(t) \right]$$

$$C(t) = \left[e^t \quad e^{-t} \right]$$

$$D(t) = \left[\frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial u_1(t)} \quad \frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial u_2(t)} \right] = \left[0 \quad 1 \right]$$

Buna göre :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + B(t)\begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \delta x(0) = \begin{bmatrix} \delta x_1(0) \\ \delta x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\delta y(t) = C(t)\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + D(t)\begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}$$

5. DOĞRUSAL SİSTEMLER

5.1. Doğrusal sistemlerin gösterimi:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ giriş, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ çıkış değerleri olmak üzere

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

biçiminde ifade edilen dinamik sistemlerin doğrusal olduğu açıkça görülmektedir. (Dikkat: Bu biçimde ifade edilemeyen doğrusal sistemler de vardır. Meselâ $u(t)$ yerine $u(t-t_1)$ olsaydı)

$T = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^r$, $\mathcal{U} = \{u \mid u: T \to U$, u parçalı sürekli ve sınırlı$\}$
$Y = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y} = \{y \mid y: T \to Y\}$, $\Sigma = \mathbb{R}^n$ için böyle bir doğrusal sistem kısaca $[A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)]$ ile gösterilir.

5.2. Doğrusal diferansiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliği için yeterlilik şartları:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

denkleminde $\quad f(x(t), u(t), t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

dersek, daha önce f üzerinde belirlenen Lipschitz şartı şöyle indirgenebilir:

$$\| f(x_1(t), u(t), t) - f(x_2(t), u(t), t) \| \le k(t) \| x_1(t) - x_2(t) \| \quad ; \quad |k(t)| < \infty$$

$$\| A(t)x_1(t) - A(t)x_2(t) \| \le k(t) \| x_1(t) - x_2(t) \|$$

$$\| A(t) \| \cdot \| x_1(t) - x_2(t) \| \le k(t) \cdot \| x_1(t) - x_2(t) \| \quad ; \quad |k(t)| < \infty$$

$\| A(t) \| < \infty$ ise bu şart sağlanır.

Özetle varlık ve teklik için yeterlilik şartları şöyle sıralanabilir:

(i) $A(\cdot)$ ve $B(\cdot)$ parçalı sürekli ve sınırlı olmalıdır.

(ii) $u(\cdot)$ parçalı sürekli ve sınırlı olmalıdır.

Dikkat: (i) şartı sağlanıyorsa $\| A(t) \| < \infty$ Lipschitz şartı da sağlanır.

Dikkat: Diferansiyel denklemin biricik çözümü $x(t) \triangleq s(t, t_0, x_0, u)$, yarı-grup ve durum geçiş kabullerini sağlar:

Yarı-grup: $s(t_2, t_0, x_0, u) = s(t_2, t_1, s(t_1, t_0, x_0, u), u)$ olduğu diferansiyel denklemden açıkça görülebilir.

Durum-geçiş: $x(t) = s(t, t_0, x_0, u)$'nun hesabı için girişin yalnızca $[t_0, t]$ aralığındaki kısmının ($u_{[t_0,t]}$) yeterli olduğu da açıktır:

$$x(t) = s(t, t_0, x_0, u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)]\, d\tau$$

↳ yalnızca $u_{[t_0,t]}$ gerekli.

5.3. HOMOJEN DURUM

5.3.1. Başlangıç değerli homojen denklem:

Girişin sıfır olduğunu kabul edersek, homojen diferansiyel denklemi elde edilir:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

Bu bir başlangıç değer problemidir. Biricik çözümünü $\phi(t, t_0, x_0) \triangleq x(t)$ ile gösterelim.

5.3.2. Teorem:

Belirli $t, t_0 \in T$ için, $x_0 \longrightarrow \phi(t, t_0, x_0)$ bağıntısı doğrusaldır.

İspat: $x_{01} \rightarrow \phi(t, t_0, x_{01})$, $x_{02} \longrightarrow \phi(t, t_0, x_{02})$ ve

$x_0 = \alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02} \longrightarrow \phi(t, t_0, x_0)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ olsun.

Yani
$$\frac{d\phi(t, t_0, x_{01})}{dt} = A(t)\phi(t, t_0, x_{01}) \ ; \ \phi(t_0, t_0, x_{01}) = x_{01}$$
$$\frac{d\phi(t, t_0, x_{02})}{dt} = A(t)\phi(t, t_0, x_{02}) \ ; \ \phi(t_0, t_0, x_{02}) = x_{02}$$

$$\frac{d\phi(t, t_0, x_0)}{dt} = A(t)\phi(t, t_0, x_0) \ ; \ \phi(t_0, t_0, x_0) = \alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02}$$

Eğer $\phi(t, t_0, x_0) = \alpha_1 \phi(t, t_0, x_{01}) + \alpha_2 \phi(t, t_0, x_{02})$ denklemi sağlıyorsa teorem doğrudur.

$$\frac{d\phi(t, t_0, x_0)}{dt} = \alpha_1 \frac{d\phi(t, t_0, x_{01})}{dt} + \alpha_2 \frac{d\phi}{dt}(t, t_0, x_{02})$$
$$= A(t)\underbrace{\left(\alpha_1 \phi(t, t_0, x_{01}) + \alpha_2 \phi(t, t_0, x_{02})\right)}_{\phi(t, t_0, x_0)} \ ; \ \phi(t, t_0, x_0) = \alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02} = x_0$$

Denklem sağlanmaktadır.

5.3.3. Durum geçiş matrisi:

5.3.3.1. Tanım: $\mathbb{R}^n$ uzayının kanonik tabanını $\left(\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n \right.$, $\left. e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ i. eleman ele alalım. $\phi(t, t_0, \cdot)$ doğrusal dönüşümünün $\mathcal{B}$ tabanına göre matris gösterimine "durum geçiş matrisi" denir ve $\Phi(t, t_0)$ ile gösterilir.

5.3.3.2. Hesaplanması:

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ → i. eleman

$\phi(t, t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\Phi_{ij}(t, t_0)$ elemanı, $\phi(t, t_0, e_j)$ 'nin e_i koordinatıdır:

$$\phi(t, t_0, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ij}(t, t_0) \cdot e_i = \begin{bmatrix} \Phi_{1j}(t, t_0) \\ \Phi_{2j}(t, t_0) \\ \vdots \\ \Phi_{nj}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

Buna göre $\Phi(t,t_0)$ 'ın j. sütunu $\phi(t,t_0,e_j)$ 'dir:

$$\Phi(t,t_0)=\left[\phi(t,t_0,e_1)\,\vdots\,\phi(t,t_0,e_2)\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,\phi(t,t_0,e_n)\right]\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

Buradaki $\phi(t,t_0,e_j)$ sütunu $(j=1,\ldots,n)$,

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)\quad ; \quad x(t_0)=e_j$$

denkleminin çözümüdür $(x(t))$. n defa çözüm yaparak $\Phi(t,t_0)$ bulunur.

5.3.3.3. <u>İddia:</u>

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)\quad ; \quad x(t)=x_0$$

denkleminin çözümü:

$$x(t)=\phi(t,t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0$$

İspat:

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}x_{0i}e_i \qquad \text{yazılabilir.}$$

$$\phi(t,t_0,x_0)=\phi\left(t,t_0,\sum_{i=1}^{n}x_{0i}e_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_{0i}\,\phi(t,t_0,e_i) \qquad \text{(doğrusallıktan)}$$

$$=\underbrace{\left[\phi(t,t_0,e_1)\,\vdots\,\phi(t,t_0,e_2)\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,\phi(t,t_0,e_n)\right]}_{\Phi(t,t_0)}\underbrace{\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{bmatrix}}_{x_0}$$

$$=\phi(t,t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0$$

<u>Örnek:</u>

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&t\end{bmatrix}}_{A(t)}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\implies\Phi(t,t_0)=?$$

Çözüm:

$$\Phi(t,t_0)=\left[\phi(t,t_0,e_1)\,\vdots\,\phi(t,t_0,e_2)\right]$$

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)\quad ; \quad x(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

denklemini çözerek $\phi(t,t_0,e_1)$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = t\,x_2(t) \longrightarrow \dfrac{dx_2(t)}{x_2(t)} = t\,dt$

$\ln x_2(t) = \dfrac{t^2}{2} + c_1 \qquad x_2(t) = c_2\, e^{\frac{1}{2}t^2}$

$x_2(t_0) = c_2\, e^{\frac{1}{2}t_0^2} \longrightarrow x_2(t) = x_2(t_0)\, e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t_0)\, e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}$

$$x_1(t) = x_1(t_0) + x_2(t_0) \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}(\tau^2 - t_0^2)}\, d\tau$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = \phi(t, t_0, e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = \phi(t, t_0, e_2) = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}(\tau^2 - t_0^2)}\, d\tau \\ e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2}(\tau^2 - t_0^2)}\, d\tau \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} \end{bmatrix}$$

5.3.3.4. <u>İddia:</u> Doğrusal zamanla değişmez durum için durum geçiş matrisinin hesaplanması:

$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ için

A ↳ $n \times n$ sabit bir matris

$$\Phi(t, t_0) = e^{A \cdot (t - t_0)} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k$$

<u>İspat:</u> $x(t)$ 'yi t_0 civarında Taylor serisine açalım:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot (t - t_0)^k$$

$\rightsquigarrow$ k 'nın eksi değerleri, t_0 'ın $x(t)$ 'nin tekil bir noktası (yani $\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty$) olması halinde sözkonusudur.

Burada $x(t_0) = x_0$ sonlu olduğu için eksi kuvvetler bulunmayacaktır:

katsayılar n boyutlu vektörlerdir.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot (t-t_0)^k = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots$$

$$c_k = \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$k=0 \Rightarrow \quad x(t_0) = x_0 = c_0 \longrightarrow \quad c_0 = \frac{x_0}{0!}$$

$$k=1 \Rightarrow \quad \dot{x}(t_0) = Ax(t_0) = Ax_0 = 1! \cdot c_1 \longrightarrow \quad c_1 = \frac{Ax_0}{1!}$$

$$k=2 \Rightarrow \quad \ddot{x}(t_0) = A\dot{x}(t_0) = A^2x_0 = c_2 \cdot 2! \longrightarrow \quad c_2 = \frac{A^2x_0}{2!}$$

- - - - - - - - - - - - -

$$c_k = \frac{A^k x_0}{k!}$$

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^k A^k}{k!} \right) \cdot x_0 = \Phi(t,t_0)\, x_0$$

Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için bu ifadenin sağlanması gerektiğinden

$$\Phi(t,t_0) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^k \cdot A^k}{k!}}_{} \triangleq e^{A\cdot(t-t_0)}$$

Burası $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ serisine benzetilebildiği için matrisin eksponansiyeli olarak tanımlanmıştır.

5.3.3.5. <u>İddia:</u> Doğrusal zamanla değişen bazı durumlar için durum geçiş matrisinin hesaplanması:

$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ durum denkleminde $A(t)$ ve $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ çarpmaya göre aralarında değişme özelliğine sahip iseler (yani $A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \right] \cdot A(t)$ ise)

$$\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \right]^k$$

İspat: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ için verilen $\Phi(t,t_0)$ ile $x(t)=\Phi(t,t_0)x_0$ 'ın

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad ; \quad x(t_0)=x_0$$

denklemini sağladığını göstermek yeterlidir. Gösterelim:

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(t,\underbrace{t_0}_{t_0 \text{ sabit}})x_0\big) = A(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için geçerli olduğundan, x_0 'ın başlarındaki matrisler eşit olmalıdır.

matris; matris

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t,t_0) \quad ; \quad \Phi(t_0,t_0)=I$$

verilen Φ bunu açıkça sağlıyor.

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^k\right] = A(t)\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^k\right]$$

Buradaki $\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^k$ türevi $\frac{d}{dt}\big(P(t)Q(t)R(t)\big) = \dot{P}(t)Q(t)R(t) + P(t)\dot{Q}(t)R(t) + P(t)Q(t)\dot{R}(t)$ (matrisler) gibi hesaplanmalıdır.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^k = A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-1} + \left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)\cdot A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-2}$$
$$+ \left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2\cdot A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-3} + \dots + \left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-1}A(t)$$

olur. Eğer $A(t)\cdot\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)\cdot A(t)$ ise

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^k = k\cdot A(t)\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-1}$$

olur. Böylece

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}\cdot A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{k-1}}_{i=k-1 \text{ dersek}} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}A(t)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{i}$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)$$

Matris diferansiyel denklem sağlanmaktadır. İddia doğrudur.

5.3.3.6. Iddia: $\overset{\nearrow n\times n}{A(t)}$ ve $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ şu durumlarda çarpmaya göre değişme özelliğine sahiptir:

(i) $A(t) = A$: sabitse

veya (ii) $A(t)\cdot A(\tau) = A(\tau)A(t)$ ise

veya (iii) $A(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\, M$ ($\alpha_i(t)$ skaler ve M matrisi sabit)

biçiminde ifade edilebiliyorsa

veya (iv) $A(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) M_i$ ($\alpha_i(t)$ skaler, M_i matrisleri sabit ve $M_iM_j = M_jM_i$)

biçiminde ifade edilebiliyorsa.

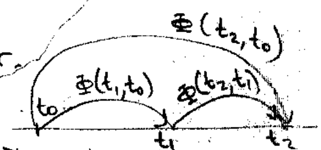
5.3.3.7. Durum geçiş matrisinin özellikleri:

(i) $\boxed{\Phi(t_0,t_0) = \overset{\nearrow n\times n}{I}}$

İspat: $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) \longrightarrow x(t_0) = \underbrace{\Phi(t_0,t_0)}_{I \text{ olmalıdır.}}x(t_0) \quad \forall x(t_0)\in\mathbb{R}^n$

(ii) $\dot{\Phi}(t,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{sabit}}}{t_0}) = A(t)\Phi(t,t_0)$; $\Phi(t_0,t_0) = I$

matris diferansiyel denklemini sağlar.



(iii) $\boxed{\Phi(t_2,t_1)\cdot\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0)}$ → Durumlar yarı-grup kabulünü sağladığı için.

$x(t_2) = \Phi(t_2,t_1)\,x(t_1) = \Phi(t_2,t_1)\cdot\Phi(t_1,t_0)\,x(t_0) = \Phi(t_2,t_0)\,x(t_0)$

(iv) $\boxed{\Phi(t_0,t)\cdot\Phi(t,t_0) = I}$ yani $\Phi(t_0,t) = \Phi(t,t_0)^{-1}$

($t_2 = t_0$ için (iii) ve (i)'den dolayı)

(v) $\forall t$ için $\det\left[\Phi(t,t_0)\right] \neq 0$

((iv)'ten de anlaşılabilir; ancak asıl 5.3.5. Teorem'de ispatlanacak.)

5.3.4. Homojen denklem için "temel matris":

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

denklemini ele alalım. $\{x_{0i}\}_{i=1}^{n}$ doğrusal bağımsız bir küme olmak üzere, denklemin $x(t_0) = x_{0i}$ için çözümleri $(i=1,\dots,n)$ yani $\phi(t,t_0,x_{0i})$'lerle elde edilen bir

$$X(t) = \left[\phi(t,t_0,x_{01}) \,\vdots\, \phi(t,t_0,x_{02}) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \phi(t,t_0,x_{0n})\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

matrisine, verilen homojen denklem için bir "temel matris" denir (biricik değildir).

Dikkat: $\Phi(t,t_0)$, özel bir temel matristir ($\Phi(t_0,t_0)=I$ olan).

5.3.5. Teorem:

$X(t)$ bir temel matris ise her t için tekil olmayan bir kare matristir. Yani $\det(X(t)) \neq 0 \quad \forall t \in T$.

İspat:

Tanım gereği $\{x_{0i}\}_{i=1}^{n}$ doğrusal bağımsız, yani $\det(X(t_0)) \neq 0$ 'dır. Tezat (çelişki) yöntemiyle ispatlayalım:

$t_1 \in T$ gibi bir anda $\det(X(t_1)) = 0$ varsayalım.

O halde öyle bazı $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ mevcuttur ki $X(t_1)c = 0$

$X(t)\cdot c$ de homojen diferansiyel denklemi sağlamalıdır:

$$\frac{d}{dt}\left(X(t)c\right) = A(t)\left(X(t)c\right) \quad ; \quad \left(X(t_1)\cdot c\right) = 0$$

t_1 anını başlangıç kabul eden çözümün t_0 anındaki değeri $\phi(t_0,t_1,0)$ olsun. Başlangıç şartı sıfır ve denklem homojen olduğundan çözüm hep sıfır olur.

$\hookrightarrow X(t_1)\cdot c = 0$

Çözümün tekliğinden dolayı

$$\phi(t_0,t_1,0) = X(t_0)\cdot c = 0$$

Böyle bir $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ mevcutsa $\det(X(t_0)) = 0$ olmalıdır ki bu da baştaki kabulümüzle bir tezat teşkil eder.

5.3.6. Teorem:

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \in \mathbb{R}^n$ homojen diferansiyel denklemi için $X(t)$ bir temel matris ve $\Phi(t,t_0)$ durum geçiş matrisi ise

$$\Phi(t,t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$$

İspat: Her iki tarafın da çözümü tek olan aynı matris diferansiyel denklemi, aynı başlangıç şartlarıyla sağladığını göstermemiz yeterlidir:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(t_0,t_0) &= I\\ X(t_0)X(t_0)^{-1} &= I\end{aligned}\right\}\ \text{aynı başlangıç şartı}$$

$$\frac{d}{dt}\left(X(t)X(t_0)^{-1}\right) = \frac{dX(t)}{dt}X(t_0)^{-1} = A(t)X(t)X(t_0)^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(X(t)X(t_0)^{-1}\right) = A(t)\left(X(t)X(t_0)^{-1}\right)$$

aynı dif. denklem

Ayrıca $$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t,t_0)$$

5.4. HOMOJEN OLMAYAN DURUM:

5.4.1. Bütün denklemin çözümü:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

$\left(t, t_0 \in T,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^r,\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}\right)$

denkleminin çözümünü arıyoruz. Durum geçiş matrisinin homojen denklemi

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t,t_0)\right) = A(t)\Phi(t,t_0) \quad ; \quad \Phi(t_0,t_0) = I$$

sağladığını gözönüne alarak

$$z(t) = \Phi(t,t_0)^{-1}x(t)$$

dönüşümü yapalım.

$x(t) = \Phi(t,t_0)z(t)$ olur. Türevini alırsak:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(t,t_0)\right) z(t) + \Phi(t,t_0)\dot{z}(t)$$

$$= A(t)\overbrace{\Phi(t,t_0) z(t)}^{x(t)} + \Phi(t,t_0)\dot{z}(t)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \Phi(t,t_0)\dot{z}(t)$$

Bunu diferansiyel denklemde yerine yazarsak

$$\Phi(t,t_0)\dot{z}(t) = B(t)u(t)$$

olması gerektiği anlaşılır. Buradan

$$\dot{z}(t) = \Phi(t,t_0)^{-1}B(t)u(t) = \Phi(t_0,t)B(t)u(t)$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

bulunur. $z(t)$ tanımını t_0 için kullanırsak

$$z(t_0) = \Phi(t_0,t_0)^{-1}x(t_0) = x(t_0) = x_0$$

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau = \Phi(t,t_0)^{-1}x(t)$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\overbrace{\Phi(t,t_0)}^{\tau\text{'ya göre sabit}}\Phi(t_0,\tau)}_{\Phi(t,\tau)}B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau}$$

bulunur.

Eğer A ve B sabitse: $\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B(\tau)u(\tau)\,d\tau}$

5.4.2. Durum geçiş fonksiyonu:

Diferansiyel denklemin çözümü yukarıdaki gibi olduğundan, bu denklemin (kısmen) ifade ettiği bir dinamik sistem gösteriminin durum geçiş fonksiyonu da

$$s(t,t_0,x_0,u) = x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Durum geçiş kabulü ve yarı grup kabulünün sağlandığı gösterilebilir.

5.4.3. Doğrusallık:

Sistem çıkışı : $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad \in \mathbb{R}^m$

ise sistem cevap fonksiyonu :

$$\rho(t,t_0,x_0,u) = y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

Burada sıfır giriş cevabı : $\rho_{sg}(t,t_0,x_0) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$

sıfır durum cevabı : $\rho_{sd}(t,t_0,u) = C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$

$\rho(t,t_0,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bağıntısının doğrusal olduğu gösterilebilir.

5.4.4. Sistem darbe tepkisi matrisi:

$(A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot))$ ile gösterilen bir doğrusal sistemin darbe tepkisi matrisi

$$H(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(\tau)\cdot\delta(t-\tau) \rightsquigarrow \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

olarak tanımlanır. Elemanları $u_j(t) = \delta(t-\tau) \triangleq \lim_{\Delta\to 0} \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \tau < t < \tau+\Delta \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

$$u_k = 0 \qquad k \neq j$$

olan u girişi için (ve sıfır başlangıç durumu) çıkışın i. elemanı $y_i(t) = [H(t,\tau)]_{ij}$ olur.

Doğrusal zamanla değişmez (A,B,C,D) gösterimi için:

$$H(t,\tau) = C e^{A(t-\tau)} B + D\cdot\delta(t-\tau)$$

Zamanla değişmezlikten dolayı yazılabilir ki

$$H(t,\tau) = H(0,\tau-t) = H(t-\tau,0) \triangleq \tilde{H}(t-\tau) \quad \text{diyelim.}$$

5.4.5. Sistem transfer fonksiyonu matrisi:

Yalnızca doğrusal zamanla değişmez sistemler için ($\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ için) $s \in \mathbb{C}$ fakat $\det(sI-A) \neq 0$ olmak üzere $\boxed{\hat{H}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D}$ olarak tanımlanır.

İddia: $\hat{H}(s) = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{Tek taraflı Laplace dönüşümü}}\{\tilde{H}(t)\}$ $\left(\text{Çünkü } \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \text{ ve } \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1}\right)$

5.5. e^{At} MATRİSİNİN HESAPLANMA YOLLARI:

5.5.1. Ters Laplace dönüşümüyle:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

5.5.2. Köşegenleştirme yöntemiyle:

V gibi öyle bir transformasyon matrisi bulalım ki

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

: köşegen bir matris olsun.

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

olur ve

$A = V\Lambda V^{-1}$ olduğundan $A^2 = V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1}$

$$A^3 = V\Lambda V^{-1}V\Lambda^2 V^{-1} = V\Lambda^3 V^{-1}$$

$$\cdots$$

$$A^k = V\Lambda^k V^{-1}$$ ve

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V\Lambda^k V^{-1} t^k}{k!} = V\left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \frac{t^k}{k!}\right)V^{-1}$$

$$\boxed{e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}}$$

olur. Peki böyle bir V matrisini nasıl bulabiliriz? Bu V matrisine "modal matris" denir.

5.5.2.1. Bir matrisin özdeğer ve özvektörleri:

$AV = V\Lambda$ olacak bir $V = [v_1 \vdots v_2 \vdots \cdots \vdots v_n]$ bulmalıyız

$$A[v^1 \vdots v^2 \vdots \cdots \vdots v^n] = [v^1 \vdots v^2 \vdots \cdots \vdots v^n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $Av^i = \lambda_i v^i$ $\quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, \; v_i \in \mathbb{C}^n, \; i=1,2,\ldots,n)$

olacak şekilde λ_i ve v^i bulmalıyız ($v^i \neq 0$).

i : indis, kuvvet değil

Bir A kare matrisi için

$$Av = \lambda v \;;\; v \neq 0$$

denklemini sağlayan λ değerlerine A matrisinin "özdeğerleri (eigenvalues)", v vektörlerine de A matrisinin "özvektörleri (eigenvectors)" denir. Her bir özdeğer için doğrusal bağımsız en az bir özvektör bulunur. Önce özdeğerlerin bulunması gerekir:

$Av = \lambda \cdot I \cdot v$ olduğundan $(\lambda I - A)v = 0$ olur. $v \neq 0$ için bu eşitlik, ancak $\det(\lambda I - A) = 0$ olmasıyla mümkün olabilir. Çünkü $\text{rank}(\lambda I - A) < n$ olmalı ki $N(\lambda I - A)$ uzayı en az 1 boyutlu olabilsin ve $v \in N(\lambda I - A)$, $v \neq 0$ mevcut olabilsin.

$$d(\lambda) \triangleq \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

polinomuna, A matrisinin "karakteristik polinomu"

ve

$$d(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

denklemine A matrisinin "karakteristik denklemi" denir. Bu denklemin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerinin her biri A matrisinin birer özdeğeridir.

Öncelikle bütün özdeğerlerinin birbirinden farklı olduğunu kabul edeceğiz. Çakışık (katlı) özdeğer bulunması durumunu daha sonra inceliyeceğiz.

5.5.2.1.1. Çakışık özdeğer yoksa:

Her bir özdeğer için yalnızca bir tane doğrusal bağımsız özvektör bulunur. λ_i özdeğerine ilişkin özdeğeri v^i olarak bulmuşsak kv^i de bu özdeğere ↳ skaler $\neq 0$ ilişkin özvektör olarak alınabilir. Ancak v^i ve kv^i doğrusal bağımlı olup sadece sıfırdan farklı bir tanesi seçilebilir.

λ_i için v^i şu denklem takımı çözülerek bulunur:

$$Av^i = \lambda_i v^i \longrightarrow \text{veya } (\lambda_i I - A)v^i = 0$$

Bu n bilinmeyenli n denklem doğrusal bağımlı olduğundan v^i'nin sıfırdan farklı olduğu anlaşılan elemanlarından birisi keyfi olarak seçilip diğer n-1 elemanı buna göre bulunur. İstenirse kesirlerden kurtulmak için, bulunan v^i sıfırdan farklı bir skalerle çarpılarak özvektör olarak alınabilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$|\lambda I - A| = d(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \,, \quad \lambda_2 = 2$$

λ_1 için v^1'in bulunması:

$$(\underbrace{\lambda_1}_{3} I - A)v^1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ +2 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2v_1^1 - v_2^1 = 0 \\ 2v_1^1 - v_2^1 = 0 \end{matrix}$$

Denklemler doğrusal bağımlı olduğundan birisini atarız.

$2v_1^1 = v_2^1 \longrightarrow$ bir bilinmeyeni (sıfırdan farklı olduğu belli) keyfi seçeriz: $v_1^1 = 1$ olsun.
$v_2^1 = 2$ olur.

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

$\lambda_2 = 2$ için v^2'nin bulunması:

$$(\lambda_2 I - A)v^2 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} v_1^2 - v_2^2 = 0 \\ 2v_1^2 - 2v_2^2 = 0 \end{matrix}$$

$v_2^2 = v_1^2$ Keyfi olarak $v_2^2 = 1$ seçersek $v_1^2 = 1$ olur.

$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Modal matrisimiz: $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ oldu.

Sağlaması:

$$V^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ +2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ +2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \longrightarrow e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{3t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{3t}+2e^{2t} & e^{3t}-e^{2t} \\ -2e^{3t}+2e^{2t} & 2e^{3t}-e^{2t} \end{bmatrix}$$

sağlaması $e^{A \cdot 0} = I$ ✓

Özvektör bulunması için diğer bir yol da $Adj(\lambda I - A)$ matrisinin ilgili özdeğer için sıfırdan farklı sütunlarından birisini almaktır. (Not: $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$ idi)

Örneğimiz için:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$Adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 1 \\ -2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$ için $Adj(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -1 & \overbrace{1}^{V^1} \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$: Herhangi bir sütunu alınabilir. Zaten sütunlar doğrusal bağımlıdır.

$\lambda_2 = 2$ için $Adj(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & \underbrace{1}_{V^2} \end{bmatrix}$ alınabilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ olsun.} \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = d(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -2 \end{array}$$

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ \lambda+2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2+4\lambda+4 & -3\lambda-6 & 0 \\ \lambda+2 & \lambda^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$ için $\quad \mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

v^1 alınabilir

$\lambda_2 = 1$ için $\quad \mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bu sütunu $1/3$ ile çarpıp v^2 diyelim.

$\lambda_3 = -2$ için $\quad \mathrm{Adj}(\lambda_3 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$1/3$ ile çarpalım.

$V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: modal matris.

$V^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(Not: V'de özvektörler hangi sırayla kullanılıyorsa Λ'da da özdeğerler aynı sırayla elde edilir.)

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sağlama: } e^{A\cdot 0} = I$$

5.5.2.1.2. Çakışık özdeğer varsa:

Yine $Adj(\lambda I - A)$ 'nın sıfırdan farklı sütunları alınarak özvektörler bulunur. Çakışık olmayan özdeğerler için sadece 1 adet özvektör bulunabilir. Çakışık özdeğer (λ_j diyelim) için bu sayı değişebilir.

$\text{rank}\left(Adj(\lambda_j I - A)\right) = r$ dersek r adet doğrusal bağımsız sütun bulunabilir ve bunlar λ_j 'ye ilişkin özvektörler olarak alınır (Bunlar ayrı ayrı skalerlerle ($\neq 0$) de çarpılabilir).

λ_j, m katlı bir özdeğer ise $1 \leq r \leq m$ olabilir.

$r = m$ ise: köşegenleştirme tam yapılabilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow d(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$\rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = +1$: çakışık özdeğer.

$$Adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-2 & -3\lambda+3 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^2-3\lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$ için $\quad Adj(\lambda_1 I - A) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1/6 \text{ ile çarpıyoruz}} \rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ için $\quad Adj(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ bunun rankına bakamıyoruz çünkü

Not: Burada olduğu gibi bazen $Adj(\lambda_i I - A)$ 'nın bütün sütunları sıfır çıkabilir. O zaman $Adj(\lambda I - A)$ 'nın λ 'ya göre türevinde $\lambda = \lambda_i$ konularak özvektörler bulunur. Yine bütün kolonlar sıfır çıkıyorsa 2. türevinde .... benzer işlem yapılır.

$$\frac{d}{d\lambda} Adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} 2\lambda + 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2\lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ için $\quad \frac{d}{d\lambda} Adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$ rankı: $2 = r$

v^2 $\quad$ $\frac{1}{2}$ ile çarpıp v^3 diyoruz.

$$v^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Doğrusal Bağımsız sütunlar alınıyor)

Modal matris: $V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow V^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Sağlama: $e^{At}\big|_{t=0} = I$ ✓

r<m ise: Köşegenleştirme normal olarak yapılamaz. Çünkü m katlı çakışık özdeğer (λ_j) için m adet özvektör normal olarak bulunamaz. Bunun yerine blok olarak köşegenleştirilmiş Jordan kanonik biçimini elde etmeye çalışırız:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & J_k \end{bmatrix} \rightarrow \text{Burada } J_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}}_{m_i \times m_i \text{ boyutlu}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Örnek:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow d(\lambda) = (\lambda+1)^3 (\lambda-2)^3 (\lambda-3)$

$J_1 = [-1]_{1\times1} \rightarrow m_1 = 1$

$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \rightarrow m_2 = 2$

$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \rightarrow m_3 = 3, \quad J_4 = [3]_{1\times1} \rightarrow m_4 = 1$

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 7 = n$

5.5.2.2. Jordan kanonik biçimi için $e^{\Lambda t}$ matrisi:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{J_k t} \end{bmatrix}$$

Burada

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{\lambda_i t} & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_i t} & 0 \\ \vdots & & 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{t^1}{1!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} = e^{\lambda_i t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t^{m_i-1}/(m_i-1)! & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 1 & t^2/2! & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & t^1/1! \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.5.2.3. Genelleştirilmiş özvektörler :

$r<m$ olduğu durumda bu özdeğer için doğrusal bağımsız özvektör sayısını m'e tamamlamak için "genelleştirilmiş özvektörler" denilen vektörler bulunur. Burada amaç, Λ matrisinde, $m_i \times m_i$ boyutlarındaki $(m_i>1)$ J_i Jordan bloklarını elde etmektir. Anlatım kolaylığı için $m_i=n$ ve $\Lambda=J_i$ olduğunu (tek özdeğer var ve n katlı) düşünelim:

$$V=[v^1 \vdots v^2 \vdots \dots \vdots v^n] \quad \text{ve} \quad V\Lambda = AV \quad \text{olduğundan :}$$

$$[v^1 \vdots v^2 \vdots \dots \vdots v^n]\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{bmatrix} = A[v^1 \vdots v^2 \vdots \dots \vdots v^n]$$

ve buradan da

$$\left.\begin{aligned} \lambda v^1 &= Av^1 \\ v^1+\lambda v^2 &= Av^2 \\ v^2+\lambda v^3 &= Av^3 \\ &\vdots \\ v^{n-1}+\lambda v^n &= Av^n \end{aligned}\right\} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} (\lambda I-A)v^1 &= 0 \\ (\lambda I-A)v^2 &= -v^1 \\ (\lambda I-A)v^3 &= -v^2 \\ &\vdots \\ (\lambda I-A)v^n &= -v^{n-1} \end{aligned}$$

denklemlerinden genelleştirilmiş özvektörler bulunur. Burada v^1, daha önce $Adj(\lambda I-A)$ 'nın sıfırdan farklı bir sütunu olarak da alınabilen özvektördür. Bazen $Adj(\lambda I-A)$ 'nın sıfırdan farklı sütunlarından birden fazla doğrusal bağımsız özvektör bulunabilir. Bu durumda b özdeğer için birden fazla Jordan bloğu bulunur. $Adj(\lambda I-A)$ 'dan bulunan başlangıç özvektörleri (v^1 gibi) ile bulunabilecek genelleştirilmiş özvektör sayısı sınırlı ve gerektiği kadardır. Fazlasını bulmaya çalışırsak çelişkili denklemlerle karşılaşırız ($1+\lambda v = \lambda v$ gibi).

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} d(\lambda) &= \lambda^2+6\lambda+9=0 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

r=rank=1 bağımsız özvektör var:

$$Adj(\lambda I-A)=\begin{bmatrix} \overset{\lambda+4}{1} & 1 \\ -1 & \underset{\lambda+2}{-1} \end{bmatrix} \longrightarrow v^1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow (\lambda I-A)v^2=-v^1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ iki denklem doğrusal bağımlı: $v_1^2+v_2^2=1 \longrightarrow$ Keyfi olarak $v_1^2=1$ seçersek $v_2^2=0$ olur.

Böylece $V = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ +3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & t e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \rightarrow e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +t e^{-3t} & -e^{-3t}(1-t) \\ +e^{-3t} & +e^{-3t} \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} = e^{At}$$

<u>Örnek:</u> Önceki örneğe benzer ama 4×4 boyutlu bir A matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$d(\lambda) = (\lambda^2 + 6\lambda + 9)^2 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -3$$

$$Adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+2 \end{bmatrix}\Bigg|_{\lambda=-3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

~ rank = r = 2
r = 2 adet bağımsız vektör var.

$V^1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve diğeri de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ~ buna sonra numara (isim, $V^?$) verelim. 2 adet genelleştirilmiş özvektör arayacağız:

$$(\lambda I - A) V^2 = -V^1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \\ V_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} V_1^2 + V_2^2 = +1 \\ V_3^2 + V_4^2 = 0 \end{array}$$

4 bilinmeyenli 2 denklem var. Keyfi olarak $V_1^2 = 1$, $V_3^2 = 0$ seçersek $V_2^2 = 0$, $V_4^2 = 0$ olur.

$V^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → Bu vektörle yeni bir genelleştirilmiş vektör ararsak →

$$(\lambda I - A) V^3 \overset{?}{=} -V^2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_3^3 \\ V_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{array}{l} -V_1^3 - V_2^3 = -1 \\ V_1^3 + V_2^3 = 0 \end{array}$ Çelişki var. Demek ki V^3 buradan bulunamaz.

Öyleyse bir sonraki sıradaki (v^3) özvektörü $Adj(\lambda I - A)$'daki diğer bağımsız sütundan alacağız:

$$v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow (\lambda I - A)v^4 = -v^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^4 \\ v_2^4 \\ v_3^4 \\ v_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1^4 + v_2^4 = 0 \\ v_3^4 + v_4^4 = 1 \end{matrix}\right\}$$ 4 bilinmeyenli 2 denklem. Keyfi olarak $v_1^4 = 0$, $v_3^4 = 1$ seçersek $v_2^4 = v_4^4 = 0$ olur.

$$v^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V = \left[v^1 \,\vdots\, v^2 \,\vdots\, v^3 \,\vdots\, v^4 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow V^{-1}AV = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] = \Lambda = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right]$$

$m_1 = 2$
$m_2 = 2$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1+t & t & 0 & 0 \\ -t & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+t & t \\ 0 & 0 & -t & 1-t \end{bmatrix} \cdot e^{-3t}$$

bulunur.

5.5.3. Cayley-Hamilton teoreminden faydalanarak:

En kolay yol sayılabilir. Bu teoreme göre her kare matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Yani $A_{n\times n}$ kare matrisinin karakteristik denklemi

$$d(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad \text{ise}$$

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0 \quad \text{olur.}$$

İspat: λ_i özdeğerine ilişkin özvektör v^i olsun:

$$(\lambda_i^n + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda_i + \alpha_0)v^i = 0 \quad \text{olur.}$$

$$\lambda_i v^i = Av^i \quad \rightarrow \quad \lambda_i^2 v^i = \lambda_i(\lambda_i v^i) = \lambda_i(Av^i) = A(\underbrace{\lambda_i v^i}_{A\cdot v^i})$$
$$= A^2 v^i$$

.....

$$\lambda_i^k v^i = A^k v^i \quad \text{olur } (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Buna göre

$$(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)v^i = 0 \quad \text{olur.}$$

$v^i \neq 0$ olan n adet doğrusal bağımsız özvektör için yazılacak bu denklemler birleştirilirse

$$(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)V = 0$$

$\hookrightarrow \det(V) \neq 0$ çünkü sütunları doğrusal bağımsız.

Buradan $A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ bulunur.

<u>İddia:</u> $k \geqslant n$ ise $A^k = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1}A^{n-1}$ biçiminde ifade edilebilir.

İspat: $A^n = -\alpha_0 I - \alpha_1 A \dots - \alpha_{n-1}A^{n-1}$

$k > n$ için ise $A^k = A^{k_1}\cdot A^{k_2}\dots$ $(k_1, k_2, \dots < n)$ olarak yazılabilir. Çarpım sonucu elde edilen A^i, $i \geqslant n$ terimlerinde yine aynı yolla derecesi küçültülerek ifadesi bulunabilir.

<u>İddia:</u> $e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$ (1)

İspat: $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$ ifadesindeki $k \geqslant n$ için A^k ifadeleri $A^0, A^1, \dots, A^{n-1}$ cinsinden yazılabileceği için.

Aynı mantıkla $k \geq n$ için $\lambda^k = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$ dolayısıyla da

$$e^{\lambda t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda + \ldots + c_{n-1}(t)\lambda^{n-1} \qquad (2)$$

yazılabilir. $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olmak üzere.

(1) ve (2) denklemlerindeki $c_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ katsayıları aynı olacaktır.

5.5.3.1. Çakışık özdeğer yoksa e^{At} matrisinin bulunması:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\lambda_1 t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda_1 + \ldots + c_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ - - - - - - - - - - \\ e^{\lambda_n t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda_n + \ldots + c_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \end{array}\right\} \text{n adet bağımsız denklem}$$

Bu denklem takımından $c_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ bilinmeyenleri çözülerek

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + \ldots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

ifadesinde kullanılarak e^{At} bulunur.

<u>Örnek:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ için $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ idi.

$$\left.\begin{array}{l} e^{3t} = c_0(t) + 3c_1(t) \\ e^{2t} = c_0(t) + 2c_1(t) \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} c_1(t) = e^{3t} - e^{2t} \\ c_0(t) = -2e^{3t} + 3e^{2t} \end{array}$$

$$e^{At} = (-2e^{3t} + 3e^{2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{3t} - e^{2t})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{3t} + 2e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ -2e^{3t} + 2e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix} \rightarrow \text{aynı sonucu çok daha kolayca bulduk.}$$

5.5.3.2. Çakışık özdeğer varsa e^{At} matrisinin bulunması:

Karakteristik polinomda $d(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$

$$= (\lambda - \lambda_i)^{m_i}(\lambda - \lambda_j)(\ldots)\ldots$$

gibi m_i katlı bir λ_i kökü (özdeğeri) bulunduğunu düşünelim. $d(\lambda)$'nın $(m_i - 1)$. mertebeye kadarki λ'ya göre türevleri de $\lambda = \lambda_i$ için sıfır olacaktır.

Bu yüzden bu özdeğer için

$$e^{\lambda t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda + \dots + c_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$$

denkleminin λ 'ya göre (m_i-1). mertebeye kadarki türevlerinde de $\lambda=\lambda_i$ yazılarak m_i adet denklem bulunur:

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= c_0(t) + c_1(t)\lambda + \dots + c_{n-1}(t)\lambda^{n-1} \\ \frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t})\Big|_{\lambda=\lambda_i} = t e^{\lambda_i t} &= c_1(t) + 2c_2(t)\lambda + \dots + (n-1)c_{n-1}(t)\lambda^{n-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}}(e^{\lambda t})\Big|_{\lambda=\lambda_i} = t^{m_i-1}e^{\lambda_i t} &= (n-1)!\cdot c_{n-1}(t) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} m_i \text{ adet} \\ \text{bağımsız} \\ \text{denklem} \end{array}$$

Diğer özdeğerler için de benzer işlem yapılarak n adet bağımsız denklem bulunur. $c_i(t)$ 'ler $(i=0,1,\dots,n-1)$ bulunarak:

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

hesaplanır.

<u>Örnek:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

örneğini hatırlayalım.

$$d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$\lambda_1 = -1$ için $e^{-t} = c_0(t) + c_1(t)(-1) + c_2(t)(-1)^2$

$\lambda_2 = 1$ için $e^{\lambda_2 t} = e^t = c_0(t) + c_1(t)\cdot 1 + c_2(t)\cdot 1^2$

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t})\Big|_{\lambda=1} = te^t = c_1(t) + 2\lambda\cdot c_2(t)\Big|_{\lambda=1} = c_1(t) + 2c_2(t)$$

Çözülürse:

$$c_0(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t$$

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

$$c_2(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A + c_2 \overset{I \text{ çıktı}}{A^2} = (c_0 + c_2)I + c_1 A$$

$$c_0 + c_2 = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (c_0+c_2)+2c_1 & -3c_1 & 0 \\ c_1 & (c_0+c_2)-2c_1 & 0 \\ 0 & 0 & (c_0+c_2)+c_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t} & \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \longrightarrow$$ aynı sonuç daha kolay bulundu.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} d(\lambda) = \lambda^2+6\lambda+9=0 \\ \lambda_1=\lambda_2=-3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-3t} = c_0 + c_1(-3) \\ te^{-3t} = c_1 \end{array}\right\} \qquad c_0 = e^{-3t}+3te^{-3t}$$

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-3t}+3te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t}+3te^{-3t} \end{bmatrix}}_{c_0 I} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2te^{-3t} & te^{-3t} \\ -te^{-3t} & -4te^{-3t} \end{bmatrix}}_{c_1 A}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t}+te^{-3t} & te^{-3t} \\ -te^{-3t} & e^{-3t}-te^{-3t} \end{bmatrix}$$ bulunur.