4. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. GİRİŞ:

Pek çok fiziksel sistemin dsg'lerinde,

$$\varrho_1\left(z_1(t), \dot z_1(t), \dots, z_1^{(v_1)}(t), z_2(t), \dot z_2(t), \dots, z_2^{(v_2)}(t), \dots\dots, z_k(t), \dot z_k(t), \dots, z_k^{(v_k)}(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varrho_k\left(z_1(t), \dot z_1(t), \dots, z_1^{(v_1)}(t), z_2(t), \dot z_2(t), \dots, z_2^{(v_2)}(t), \dots\dots, z_k(t), \dot z_k(t), \dots, z_k^{(v_k)}(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t\right) = 0$$

biçiminde diferansiyel denklem takımlarıyla karşılaşırız. Burada $u_1(.), \dots, u_m(.)$ bilinen fonksiyonlardır.

Skaler değişkenlerden oluşan bu diferansiyel denklem takımı,

$$\varrho(x(t), \dot x(t), u(t), t) = 0 \quad , \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

biçiminde vektörel bir diferansiyel denklem haline getirilebilir.

Şöyle ki, örneğin

$$x(t) = \Big[\underbrace{z_1(t)}_{x_1(t)}, \underbrace{\dot z_1(t)}_{x_2(t)}, \dots, \underbrace{z_1^{(v_1-1)}(t)}_{x_{v_1}(t)}, z_2(t), \dot z_2(t), \dots, z_2^{(v_2-1)}(t), z_k(t), \dots, z_k^{(v_k-1)}(t)\Big]$$

! $z_1^{(v_1)}$ alınmıyor!

dersek $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ve seçilebilir. $n = v_1 + v_2 + \dots v_k$

$$\varrho(x(t), \dot x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} \dot x_1(t) - x_2(t) \\ \vdots \\ \dot x_{v_1-1}(t) - x_{v_1}(t) \\ \varrho_1(\dots) \\ \dot x_{v_1+1}(t) - x_{v_1+2}(t) \\ \vdots \\ \dot x_{v_1+v_2-1}(t) - x_{v_1+v_2}(t) \\ \varrho_2(\dots) \\ \vdots \\ \dot x_{v_1+\dots+v_{k-1}+1}(t) - x_{v_1+\dots v_{k-1}+2}(t) \\ \vdots \\ \dot x_{v_1+\dots+v_k-1}(t) - x_{v_1+\dots+v_k}(t) \\ \varrho_k(\dots) \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

Farklı biçimde de seçilebilirdi.

$g(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) = 0$ denkleminden $\dot{x}(t)$ 'nin çözülebildiğini varsayarsak,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

yazılabilir. Bu biçime "normal biçim" denir.

4.2. ÇÖZÜMÜN TEKLİĞİ:

Normal biçimde verilen bir diferansiyel denklemin, verilen bir $x(t_0)$ başlangıç şartı için hangi durumda $t \geq t_0$ için çözümü tektir?

4.2.1. Süreklilik:

Tanım: $(V, F, \|\cdot\|_V)$ ve $(W, F, \|\cdot\|_W)$ normlu vektör uzayları olmak üzere $f: V \to W$ biçiminde bir dönüşüm veya fonksiyon (doğrusal olmak zorunda değil) düşünelim. $v_0 \in V$ gibi bir noktada f 'in sürekli olduğu söylenir ancak ve eğer verilen her $\epsilon > 0$ için

$\|v - v_0\|_V < \delta$ olan her durumda $\|f(v) - f(v_0)\|_W < \epsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcut oluyorsa.

Eğer V 'deki her noktada f sürekli ise, "f süreklidir" denilir.
Eğer $[t_a, t_b]$ aralığında f 'in süreksiz olduğu nokta sayısı sonlu ise "f, $[t_a, t_b]$ aralığında parçalı süreklidir" denilir.

4.2.2. Lipschitz koşulu:

Tanım: f, normal biçimdeki bir diferansiyel denklemin sağ tarafı olsun. $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ 'deki uygun bir norm olmak üzere, f 'in Lipschitz koşulunu sağladığı söylenir ancak ve eğer

$\forall x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ için $\|f(x(t), u(t), t) - f(\hat{x}(t), u(t), t)\| \leq k(t) \|x(t) - \hat{x}(t)\|$

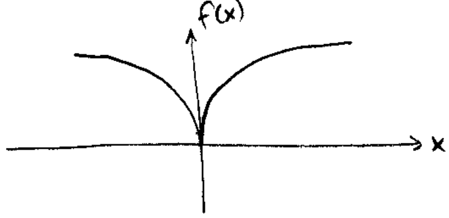
eşitsizliğini sağlayan $0 < k(t) < \infty$ biçiminde parçalı sürekli bir fonksiyon mevcut ise.

Not: Bir boyutlu durumda:

$\forall x_1, x_2$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|$ olmasının anlamı, türevin sınırlı olmasıdır. Yani

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < \infty$$

Örnek: $f(x) \triangleq +\sqrt{|x|} = \begin{cases} +\sqrt{x} & x \geq 0 \\ +\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ olsun.



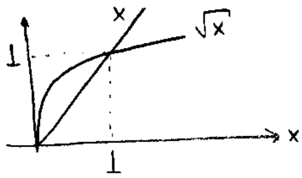
f süreklidir (açık).
Lipschitz koşulu için $0 < k < \infty$ olmak üzere

$$\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x) - f(\hat{x})| \leq k|x - \hat{x}|$$

şartını sağlayan bir k sayısı arayalım.

$\hat{x} = 0$ ve $x > 0$ olsun. $f(\hat{x}) = 0$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ olur.

$|f(x) - f(\hat{x})| = +\sqrt{x} \leq kx$ olan bir $k < \infty$ var mıdır?



Her $k < \infty$ için bazı $x \in \mathbb{R}$ noktalarında $\sqrt{x} > kx$ olduğu görülmektedir.
Bu yüzden f, Lipschitz koşulunu sağlamaz.

Peki $f(x(t))$ bir diferansiyel denklemin sağ tarafı olsaydı çözüm ne olurdu?

$\dot{x}(t) = +\sqrt{|x|}$ denkleminin $x(0) = 0$ başlangıç koşulu için $t \geq 0$ zamanlarındaki bir çözümü $x(t) = 0$
diğer bir çözümü de $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$

$$\left(\dot{x}(t) = \frac{1}{2}t^2 = +\sqrt{\left|\frac{t^2}{4}\right|} \right)$$

Yani çözüm tek olmuyor.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ olsun. f parçalı süreklidir.

$\epsilon > 0$ olmak üzere
$x = \epsilon$ ve $\hat{x} = -\epsilon$ seçelim.

$|f(x) - f(\hat{x})| = 2 \leq k|x - \hat{x}| = k.2\epsilon$

$\frac{1}{\epsilon} \leq k$ şartının sağlanması için, $\epsilon \to 0$'a giderken $k \to \infty$'a gitmektedir. Yani Lipschitz koşulu sağlanmamaktadır.

Peki $\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{cases} -1 & x(t) \geq 0 \\ 1 & x(t) < 0 \end{cases}$

diferansiyel denkleminin $x(0)=0$ için $t \geq 0$ çözümü ne olurdu?

$\dot{x}(0) = f(x(0)) = f(0) = -1 \rightarrow x(t)$ azalmaya meylediyor. Ancak,

$\epsilon > 0$ için $x(\epsilon) < 0 \Rightarrow \dot{x}(\epsilon) = f(x(\epsilon)) = 1 \rightarrow x(t)$ artmaya meylediyor.

---- (artarsa azalması, sabit kalırsa veya azalırsa artması gerekiyor)

$x(t)$ hiç bir durumda diferansiyel denklemi sağlıyamıyor.

Yani çözümsüz.

4.2.3. Bellman-Gronwall yardımcı önermesi (Lemma):

$k(t) \geq 0$, $\rho(t) \geq 0$ fonksiyonları ve $c \geq 0$ sabiti için $t \geq t_0$ olmak üzere,

$$\rho(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} k(\tau)\rho(\tau)d\tau \implies \rho(t) \leq c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}$$

İspat: Kabul gereği $\dfrac{\rho(t)}{c + \int_{t_0}^{t} k(\tau)\rho(\tau)d\tau} \leq 1$

Her iki tarafı $k(t)$ ile çarpıp t_0'dan t'ye integralini alalım:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{k(\tau)\rho(\tau)}{c + \int_{t_0}^{\tau} k(p)\rho(p)dp} \cdot d\tau \leq \int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau$$

$h(\tau) \triangleq c + \int_{t_0}^{\tau} k(p)\rho(p)dp$ dersek $\dfrac{dh(\tau)}{d\tau} = k(\tau)\rho(\tau)$ olacağından

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dh(\tau)}{h(\tau)} = \ln(h(\tau))\Big|_{t_0}^{t} = \ln(h(t)) - \ln c = \ln\left(\frac{h(t)}{c}\right) \leq \int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau$$

$$h(t) = c + \int_{t_0}^{t} k(\underbrace{p}_{\tau \text{ da yazabiliriz}})\rho(p)dp \leq c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}$$

Kabul gereği $\rho(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} k(\tau)\rho(\tau)d\tau$ olduğundan,

$$\rho(t) \leq c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}$$ olur.

4.2.4. Picard Teoremi:

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $t, t_0 \in [0,T]$; $t > t_0$; $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$

olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

başlangıç şartlı diferansiyel denklemini ele alalım. Eğer

(i) f Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, yani

$\forall x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ için $\|f(x(t),t) - f(\hat{x}(t),t)\| \leq k(t) \cdot \|x(t) - \hat{x}(t)\|$

eşitsizliğini sağlayan parçalı sürekli $0 < k(t) < \infty$ fonksiyonu mevcutsa

ve (ii) f parçalı sürekli ve sınırlı ise

(1) denkleminin tek bir çözümü vardır.

<u>İspat:</u> (1) diferansiyel denkleminin her iki tarafının integralini alalım:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)\,d\tau \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

(2) denklemi (1) denklemine denktir; yani çözümleri aynıdır.

$x(\cdot)$ çözümünün ait olduğu vektör uzayı $C^n([0,T])$ 'dir.

$$C^n([0,T]) \triangleq \underbrace{C([0,T]) \times C([0,T]) \times \ldots \times C([0,T])}_{n \text{ defa}}$$

(çünkü f parçalı sürekli ve sınırlı, T sonlu olduğundan $x: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ hep sürekli ve sonludur.)

Norm olarak $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty : C^n([0,T]) \to [0,\infty)$ seçelim. Yani

$$\|x\| = \|x\|_\infty \triangleq \max_{t \in [0,T]} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)| \right)$$

$(C^n([0,T]), \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayıdır, yani tam bir normlu vektör uzayıdır.

(2) denklemini tekrarlı yaklaşma (iterasyon) yöntemiyle çözmeye çalışalım. Tekrarların $(C^n([0,T]), \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ uzayında bir Cauchy dizisi oluşturduğu gösterilirse, limitin de $C^n([0,T])$ 'de olduğu anlaşılır.

(2) denklemi için Picard'ın tekrarları şöyledir:

$x^0(t) = x_0$ 'dan başlayarak,

$$x^1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x^0(\tau), \tau)\, d\tau$$

$$x^2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x^1(\tau), \tau)\, d\tau$$

$$\vdots$$

$$x^i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x^{i-1}(\tau), \tau)\, d\tau$$

Eğer bu dizinin bir limiti varsa bu limit, (2) 'nin bir çözümüdür. $\{x^i\}$ dizisinin $C^n([0,T])$ 'de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilirse bu limit mevcuttur (çünkü Banach uzayı). Bunun için,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x^n - x^m\| = 0 \quad \text{olduğu gösterilmelidir.}$$

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(x^0(\tau), \tau)\, d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(x^0(\tau), \tau)\|\, d\tau$$

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| \leq K \int_{t_0}^{t} d\tau = K\cdot(t - t_0) \qquad (3)$$

↳ (ii) kabulünden (parçalı süreklilik ve sınırlılık) dolayı.

Diğer yandan,

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(x^1(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), \tau)]\, d\tau \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f(x^1(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), \tau)\|\, d\tau$$

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} k(\tau)\cdot\|x^1(\tau) - x^0(\tau)\|\, d\tau \qquad (4)$$

↳ (i) kabulünden (Lipschitz) dolayı.

$k(t)$ 'nin üst sınırına $\bar{k}$ dersek $(k(t) \le \bar{k} < \infty)$ ve (3)'ü (4)'de kullanırsak:

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| \le \bar{k} K \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)\, d\tau$$

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| \le \frac{K \bar{k}}{2} (t - t_0)^2 \qquad (5)$$

(4) ve (5)'i elde etmek için yaptığımız işlemleri, sonraki tekrarlarda da yaparsak

$$\|x^i(t) - x^{i-1}(t)\| \le \left(\frac{K}{\bar{k}}\right) \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^i}{i!} \qquad (6)$$

elde edilir. $n > m$ olsun.

$$\|x^n(t) - x^m(t)\| = \|x^n(t) - x^{n-1}(t) + x^{n-1}(t) - + \dots - x^{m+1}(t) + x^{m+1}(t) - x^m(t)\|$$

$$\le \|x^n(t) - x^{n-1}(t)\| + \dots + \|x^{m+1}(t) - x^m(t)\|$$

$$\|x^n(t) - x^m(t)\| \le \frac{K}{\bar{k}} \cdot \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^n}{n!} + \frac{K}{\bar{k}} \cdot \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{K}{\bar{k}} \cdot \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^{m+1}}{(m+1)!}$$

↳ (6)'yı kullanıyoruz.

Sağ tarafa başka pozitif terimler ($n < i < \infty$ için (6) benzeri) ekliyebiliriz:

$$\|x^n(t) - x^m(t)\| \le \frac{K}{\bar{k}} \left[\frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^n}{n!} + \dots \right]$$

$$\|x^n(t) - x^m(t)\| \le \frac{K}{\bar{k}} \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^i}{i!}}_{e^{\bar{k}(t - t_0)}} - \sum_{i=0}^{m} \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^i}{i!} \right]$$

$$\|x^n(t) - x^m(t)\| \le \frac{K}{\bar{k}} \left[e^{\bar{k}(t - t_0)} - \sum_{i=0}^{m} \frac{(\bar{k} \cdot (t - t_0))^i}{i!} \right]$$

$$\|x^n - x^m\|_\infty = \max_{t \in [0,T]} \|x^n(t) - x^m(t)\| \le \frac{K}{\bar{k}} \left(e^{\bar{k}T} - \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \frac{(\bar{k}T)^i}{i!}}_{m \to \infty \text{ için } e^{\bar{k}T}} \right)$$

$\lim_{n,m \to \infty} \|x^n - x^m\|_\infty = 0$. Yani $\{x^i\}$ bir Cauchy dizisidir.

Dolayısıyla bir limiti vardır ve bu limit (1) 'in bir çözümüdür.
Şimdi bu çözümün biricik olduğunu ispatlıyalım :

x_1 ve x_2, (1) 'in iki ayrı çözümü olsun. Yani

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f(x_1(t),t) \quad , \quad x_1(t_0) = x_0$$

ve
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f(x_2(t),t) \quad , \quad x_2(t_0) = x_0$$

Diğer bir ifadeyle:

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_1(\tau),\tau)d\tau \; ; \quad x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_2(\tau),\tau)d\tau$$

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\left[f(x_1(\tau),\tau) - f(x_2(\tau),\tau)\right]d\tau\right\|$$
$$\leq \int_{t_0}^{t}\|f(x_1(\tau),\tau) - f(x_2(\tau),\tau)\|d\tau$$

f Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} k(\tau)\|x_1(\tau)-x_2(\tau)\|d\tau$$

şartını sağlayan bir $0<k(t)<\infty$ mevcuttur. Bu ifadeyi,
$\rho(t) = \|x_1(t)-x_2(t)\|$, $k(t)=k(t)$ ve $c=0$ alarak
Belmann-Gronwall yardımcı önermesinde kullanırsak

$$\rho(t) = \|x_1(t)-x_2(t)\| \leq \underbrace{c}_{0} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} = 0$$

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| = 0 \quad \longrightarrow \quad \forall t \geq t_0 \text{ için } x_1(t) = x_2(t)$$

olmak zorundadır. Yani (1) 'in çözümü biriciktir.

<u>Dikkat:</u> (1) denkleminin çözümünün varlık ve tekliği ispatlanmıştır.

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

genel diferansiyel denklemi için de çok benzer şekilde ispat yapılabilir. Bu durumda ayrıca $u(\cdot)$ 'nun sınırlı ve parçalı sürekli olması koşulu da eklenir.

<u>Dikkat</u>: Buradaki varlık ve teklik şartları gereklilik değil, "yeterlilik" şartlarıdır.

<u>Örnek</u>: $\dot{x}(t) = \underbrace{x(t)\delta(t)}_{f(x(t),t)}$ $\qquad \delta(t) \triangleq \lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \le t < \Delta \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$

Burada $|f(x(t),t)|$ sınırlı değildir. $\left|\frac{\partial f(x(t),t)}{\partial x}\right|$ de sınırlı değildir.

Ancak: $\frac{dx(t)}{x(t)} = \delta(t)\,dt$ $\qquad \ln x(t) = 1(t) + c_1$

$$1(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$x(t) = c_2 e^{1(t)}$ $\qquad x(t_0) = c_2 e^{1(t_0)}$

$c_2 = x(t_0)\, e^{-1(t_0)}$ $\qquad x(t) = x(t_0)\, e^{[1(t) - 1(t_0)]}$

Çözüm var ve tek. Her ne kadar şartlar sağlanmıyorsa da.

4.3. DİFERANSİYEL DENKLEMİN DOĞRUSALLAŞTIRILMASI:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$; $\quad x(t_0) = x_0$

ele alalım. $u(t) \in \mathbb{R}^r$; $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ve $t \geq t_0$ için çözümün varlık ve teklik için yeter şartlara sahip olduğunu ve çözümün $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olduğunu düşünelim. Eğer x_0 ve/veya $u(\cdot)$ küçük bir miktar değiştirilirse $x(\cdot)$ nasıl değişir? Bu diferansiyel denklem bir dinamik sisteme ilişkin ise ve bu sistemin çıkışı

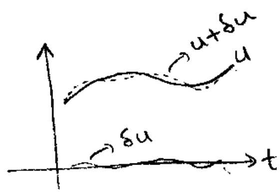
$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \in \mathbb{R}^m$$

ise $(x_0, u(\cdot))$ çiftinde yapılan değişiklikle $y(\cdot)$ nasıl değişir? Araştıralım:

$(x_0, u(\cdot)) \longrightarrow (x_0 + \delta x_0,\ u(\cdot) + \delta u(\cdot))$ olursa (çok küçük $\|\delta x_0\|$ ve $\|\delta u(\cdot)\|$ için)

$(x(\cdot), y(\cdot)) \longrightarrow (\underbrace{x(\cdot) + \delta x(\cdot)}_{\hat{x}(\cdot)},\ \underbrace{y(\cdot) + \delta y(\cdot)}_{\hat{y}(\cdot)})$ oluyor.

$\delta x(\cdot)$ ve $\delta y(\cdot)$ ne olur?



$\hat{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ ve $\hat{y}(t) = y(t) + \delta y(t)$,

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t) + \delta u(t), t) \; ; \quad \hat{x}(t_0) = x_0 + \delta x_0$$
$$\hat{y}(t) = h(\hat{x}(t), u(t) + \delta u(t), t)$$

$f(\hat{x}(t), u(t)+\delta u(t), t)$ ve $h(\hat{x}(t), u(t)+\delta u(t), t)$ 'yi $(x(t), u(t))$ komşuluğunda Taylor serisine açarsak:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \cancel{\frac{dx(t)}{dt}} + \frac{d}{dt}(\delta x(t)) = f(x(t)+\delta x(t), u(t)+\delta u(t), t)$$
$$= \cancel{f(x(t), u(t), t)} + \left[\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial x(t)}\right]\cdot \delta x(t) + \left[\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial u(t)}\right]\delta u(t)$$

+ yüksek mertebeli terimler
(ihmal edilecek)

$$\hat{y}(t) = \cancel{y(t)} + \delta y(t) = h(x(t)+\delta x(t), u(t)+\delta u(t), t)$$
$$= \cancel{h(x(t), u(t), t)} + \left[\frac{\partial h(x(t),u(t),t)}{\partial x(t)}\right]\cdot \delta x(t) + \left[\frac{\partial h(x(t),u(t),t)}{\partial u(t)}\right]\cdot \delta u(t)$$

+ yüksek mertebeli terimler
(ihmal edilecek)

Buradaki bir vektör fonksiyonun argümanı olan bir vektöre göre türevi şöyle tanımlıdır:

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{ij} \triangleq \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \qquad \text{Benzer şekilde} \quad \left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}$$

Türev bir matris olup, ij. elemanı yukarıdaki gibidir.

$\delta x(\cdot)$ ve $\delta y(\cdot)$ şu denklem takımını sağlar:

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = \underbrace{\left[\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial x(t)}\right]}_{\triangleq A(t)\,:\, n\times n}\cdot \delta x(t) + \underbrace{\left[\frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial u(t)}\right]}_{\triangleq B(t)\,:\, n\times r}\delta u(t)$$

$$\delta x(t_0) = \delta x_0$$

$$\delta y(t) = \underbrace{\left[\frac{\partial h(x(t),u(t),t)}{\partial x(t)}\right]}_{\triangleq C(t)\,:\, m\times n}\cdot \delta x(t) + \underbrace{\left[\frac{\partial h(x(t),u(t),t)}{\partial u(t)}\right]}_{\triangleq D(t)\,:\, m\times r}\cdot \delta u(t)$$

olarak tanımlanırsa dinamik sisteme ilişkin denklem takımı, verilen $(x_0, x(\cdot), u(\cdot))$ civarında

$$\frac{d}{dt}\big(\delta x(t)\big) = A(t)\cdot\delta x(t) + B(t)\cdot\delta u(t) \quad ; \quad \delta x(t_0) = \delta x_0$$

$$\delta y(t) = C(t)\cdot\delta x(t) + D(t)\cdot\delta u(t)$$

şeklinde doğrusallaştırılmış olur.

<u>Örnek:</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + e^{-2t}x_1(t)x_2(t) - u_1(t) \\ x_1(t)x_2(t)^2 - e^{-t} + u_2(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) + u_2(t) = h(x(t), u(t), t)$$

dinamik sisteminin, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ için

çözümü $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$ olarak bulunmaktadır. Bu

$x(0)$, $u(\cdot)$ ve $x(\cdot)$ civarında sistemin doğrusallaştırılmış denklemlerini bulalım:

$$A(t) = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial f_2(\;)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_2(\;)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + e^{-2t}x_2(t) & e^{-2t}x_1(t) \\ x_2(t)^2 & 2x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & 2 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial u_1(t)} & \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial u_1(t)} \\ \frac{\partial f_2(\ldots)}{\partial u_1(t)} & \frac{\partial f_2(\ldots)}{\partial u_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B(t)$$

$$C(t) = \left[\frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial x_1(t)} \quad \frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial x_2(t)} \right] = \left[x_2(t) \quad x_1(t) \right]$$

$$C(t) = \left[e^{t} \quad e^{-t} \right]$$

$$D(t) = \left[\frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial u_1(t)} \quad \frac{\partial h_1(\ldots)}{\partial u_2(t)} \right] = \left[0 \quad 1 \right]$$

Buna göre :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + B(t)\begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \delta x(0) = \begin{bmatrix} \delta x_1(0) \\ \delta x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\delta y(t) = C(t)\begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + D(t)\begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix}$$

5. DOĞRUSAL SİSTEMLER

5.1. Doğrusal sistemlerin gösterimi:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ giriş, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ çıkış değerleri olmak üzere

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

biçiminde ifade edilen dinamik sistemlerin doğrusal olduğu açıkça görülmektedir. (Dikkat: Bu biçimde ifade edilemeyen doğrusal sistemler de vardır. Mesela $u(t)$ yerine $u(t-t_1)$ olsaydı)

$T = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^r$, $\mathcal{U} = \{u \mid u : T \to U$, u parçalı sürekli ve sınırlı$\}$

$Y = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y} = \{y \mid y : T \to Y\}$, $\Sigma = \mathbb{R}^n$ için böyle bir doğrusal sistem kısaca $[A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), D(\cdot)]$ ile gösterilir.

5.2. Doğrusal diferansiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliği için yeterlilik şartları:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$