DERS İÇERİĞİ

Lineer Cebir

Dinamik Sistemler

Normlandırılmış Uzaylar

Adi Türevsel Denklemler (Genel)

Doğrusal Türevsel Denklemler

Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler

İç (Skaler) Çarpım Uzayları

Periyodik Sistemler

Sistem Gerçekleştirme Teorisi

Kontrol Edilebilirlik ve Gözlenebilirlik

Kararlılık

1. LİNEER CEBİR

ÖN BİLGİ:

Tanım:
GRUP VE DEĞİŞMELİ GRUP

Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı bir $\star$ işlemi düşünelim. Eğer

1) A kümesi $\star$ işlemine göre kapalı ise (yani $a \star b \in A \quad \forall a,b \in A$)

2) A kümesinin $\star$ işlemine göre birleşme özelliği varsa (yani $[a \star b] \star c = a \star [b \star c] \quad \forall a,b,c \in A$)

3) A kümesinin $\star$ işlemine göre etkisiz elemanı varsa

4) A kümesinin $\star$ işlemine göre tersi varsa,

$(A, \star)$ bir gruptur.

Ayrıca değişme özelliği de varsa (yani $a \star b = b \star a \quad \forall a,b \in A$)

$(A, \star)$ değişmeli gruptur.

1.1. CİSİM

<u>Tanım:</u>

Bir küme (F ile gösterelim), bu küme elemanları üzerinde tanımlanmış iki işlem ($\oplus$ ve $\odot$ ile gösterelim) ile beraber aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir <u>cisim</u>dir.

I. $(F, \oplus)$ grubu şu özelliklere sahiptir:

(i) $a \in F$ ve $b \in F \Rightarrow a \oplus b \in F$ (kapalılık öz.)
ve $a \oplus b = b \oplus a$ (değişme öz.)

(ii) $a, b, c \in F \Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ (birleşme öz.)

(iii) F kümesinde "Sıfır eleman" adı verilen, $\oplus$ işlemine göre etkisiz bir eleman ("0" ile gösterelim) mevcuttur.
Yani $a \in F \Rightarrow a \oplus 0 = a$

(iv) $\forall a \in F$ için, F kümesinde $\oplus$ işlemine göre bir "ters eleman" ("$-a$" ile gösterelim) mevcuttur öyle ki $a \oplus (-a) = 0$

II. $(F, \odot)$ grubu şu özelliklere sahiptir:

(i) $a \in F$ ve $b \in F \Rightarrow a \odot b \in F$ (kapalılık öz.)
ve $a \odot b = b \odot a$ (değişme öz.)

(ii) $a, b, c \in F \Rightarrow a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (birleşme öz.)

(iii) F kümesinde "birim eleman" adı verilen, $\odot$ işlemine göre etkisiz bir eleman ("1" ile gösterelim) mevcuttur.
Yani $a \in F \Rightarrow a \odot 1 = a$

(iv) Sıfır eleman hariç $\forall a \in F$ için, F kümesinde $\odot$ işlemine göre bir ters eleman ("a^{-1}" ile gösterelim) mevcuttur öyle ki $a \odot a^{-1} = 1$

III. $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.
Yani:
$$a, b, c \in F \Rightarrow a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

Yukarıdaki şartların tümü sağlanıyorsa, $(F, \oplus, \odot)$ bir <u>cisimdir</u>.

<u>Örnekler:</u>

1) $\mathbb{R}$: Gerçel sayılar kümesi
   $+$: Bildiğimiz gerçel sayı toplama işlemi
   $\cdot$: Bildiğimiz gerçel sayı çarpma işlemi

olarak tanımlanırsa, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisimdir.

2) $\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar kümesi
   $+$: Bildiğimiz karmaşık sayı toplama işlemi
   $\cdot$: Bildiğimiz karmaşık sayı çarpma işlemi

olarak tanımlanırsa, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bir cisimdir.

3) $F = \{0, 1\}$
   $\oplus$: Boole cebrindeki "seçkin veya" işlemi, yani
$$0 \oplus 0 = 0$$
$$0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1$$
$$1 \oplus 1 = 0$$
   $\cdot$: Boole cebrindeki "ve" işlemi, yani
$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$
olarak tanımlanırsa $(F, \oplus, \cdot)$ bir cisim midir?

Çözüm: Her iki işleme göre de F kümesinin kapalılık, değişme, birleşme özellikleri ve etkisiz elemanları mevcuttur (Açıkça görüldüğü gibi).

$\oplus$ işleminin "$\cdot$" işlemi üzerinde dağılma özelliği olduğu da açıkça görülmektedir.

$\oplus$ işlemine göre 0'ın tersi 0, 1'in tersi 1'dir.

$\cdot$ işlemine göre 1'in tersi 1'dir. 0'ın tersi olmasını ise zaten beklemiyorduk.

Tüm şartlar sağlandığı için, $(F, \oplus, \cdot)$ bir cisimdir.

4) $F^{n\times n}$: $n\times n$ matrisler kümesi
$+$: Bildiğimiz matris toplama işlemi
$\cdot$: Bildiğimiz matris çarpma işlemi
olarak tanımlanıyor. $(F^{n\times n}, +, \cdot)$ bir cisim midir?

Çözüm:

$$A \in F^{n\times n} \text{ ve } B \in F^{n\times n} \Rightarrow A\cdot B \neq B\cdot A$$

Değişme özelliği şartı "$\cdot$" işlemi için sağlanmadığı için $(F^{n\times n}, +, \cdot)$ bir cisim değildir.

5) $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi $= \{0, 1, 2, \dots\}$
"$+$" ve "$\cdot$" bildiğimiz toplama ve çarpma işlemleri olarak tanımlanıyor. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ bir cisim midir?

Çözüm:
1, 2, 3, ... gibi pozitif sayıların "$+$" işlemine göre tersleri $\mathbb{N}$ kümesi içinde mevcut değildir. Bu yüzden $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ bir cisim değildir.

6) I : Tamsayılar kümesi $= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$(I, +, \cdot)$ bir cisim midir?

Çözüm:
"$\cdot$" işlemine göre 2, 3, 4, ... gibi elemanların tersleri I kümesinde mevcut değildir. Bu yüzden $(I, +, \cdot)$ kümesi cisim değildir.

1.2. VEKTÖR UZAYI :

1.2.1. Tanım:

Bir vektör uzayı (doğrusal uzay) şunlardan oluşur:

I. Skalerlerden oluşan bir F cismi

II. "Vektör" denilen elemanlardan oluşan bir V kümesi

III. V kümesi elemanları üzerinde tanımlı "vektörel toplama" adı verilen ve şu şartları sağlayan bir "+" işlemi:

(i) $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$ (kapalılık öz.)

ve $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (değişme öz.)

(ii) $v_1, v_2, v_3 \in V \Rightarrow v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (birleşme öz.)

(iii) V kümesinde "sıfır eleman" adı verilen, "+" işlemine göre etkisiz bir eleman ("0" ile gösterelim) mevcuttur. Yani $\forall v \in V$ için $v + 0 = v$

(iv) $\forall v \in V$ için, V kümesinde "+" işlemine göre bir "$-v$" elemanı mevcuttur öyle ki

$$v + (-v) = 0$$

IV. "Skaler çarpma" denilen ve şu şartları sağlayan bir "$\cdot$" işlemi:

(i) $\forall \alpha \in F$ skaleri ve $\forall v \in V$ vektörü için $\alpha \cdot v \in V$

(ii) $\forall v \in V$ için $1 \cdot v = v$, buradaki "1", F'deki birim elemandır.

(iii) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ ve $\forall v \in V$ için

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot v) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot v$$

bu işlem cisimde tanımlı

Bunlar şimdi tanımlanan vektör uzayındaki "$\cdot$" işlemi

(iv) $\forall \alpha \in F$ ve $\forall v_1, v_2 \in V$ için

$$\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$$

(v) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ ve $\forall v \in V$ için $\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\text{cisimde tanımlı "+" işlemi}} \cdot v = \alpha_1 \cdot v \underbrace{+}_{\text{vektör uzayında tanımlı "+" işlemi}} \alpha_2 \cdot v$

(V, F) bir <u>vektör uzayı</u> olarak adlandırılır.

<u>Örnekler:</u>

1) F bir cisim olmak üzere n-boyutlu F^n uzayı.

Burada $F^n \underbrace{\triangleq}_{\text{tanım}} \{ v \mid v = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \}$

Vektörel toplama "+" şöyle tanımlanıyor:

$v_1 = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ ve $v_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in F^n$

olmak üzere $v_1 \underbrace{+}_{\text{vektörel toplama}} v_2 \triangleq (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

F cisminde tanımlı "+" işlemi

Skaler çarpma "·" işlemi de şöyle tanımlanıyor:

$v = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere

$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \triangleq (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$

vektör uzayında tanımlı skaler çarpma işlemi

F cisminde tanımlı "·" işlemi

Buna göre (F^n, F)'in bir vektör uzayıdır.

2) $\mathbb{R}$ cismi üzerinde elemanları mxn matrisler olan $\mathbb{R}^{m\times n}$ kümesi şöyle tanımlanan "+" ve "·" işlemleriyle bir vektör uzayıdır:

$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$[A \underbrace{+}_{\text{şimdi tanımlanan vektörel toplama}} B]_{ij} \triangleq [A]_{ij} \underbrace{+}_{\mathbb{R} \text{ cisminde tanımlı toplama}} [B]_{ij}$, $[\alpha \cdot A]_{ij} \triangleq \alpha \cdot [A]_{ij}$

Burada $[A]_{ij}$ demek, A matrisinin i. satır j. sütun elemanı demektir.

3) Boş olmayan bir S kümesinin elemanlarını bir F cismindeki elemanlara bağlayan f fonksiyonlarının kümesini (V) ele alalım:

$$V = \{ f \mid f : S \to F \}$$

Not: $f \in V$ fakat herhangi bir $s \in S$ için $f(s) \in F$

Vektörel toplama şöyle tanımlanıyor:

$f, g \in V$ ise $(f+g)(s) \triangleq f(s) + g(s)$

vektör uzayındaki toplama — cisimdeki toplama

Skaler çarpma da şöyle tanımlanıyor:

$\alpha \in F$, $f \in V$ ise $(\alpha \cdot f)(s) \triangleq \alpha \cdot f(s)$

cisimdeki çarpma — vektör uzayındaki skaler çarpma

Buna göre (V,F) bir vektör uzayı mıdır?

Çözüm:

Tanımdaki I ve II mevcut

III'deki vektörel toplama şartlarına bakalım:

(i) $f, g \in V \Rightarrow (f+g)(s) = f(s) + g(s) \in F \quad \forall s \in S$ için
$(g+f)(s) = g(s) + f(s) \in F \quad \forall s \in S$ için

Yani $f+g = g+f \in V$ ✓

(ii) $f, g, h \in V \Rightarrow (f+(g+h))(s) = f(s) + (g+h)(s)$
$= f(s) + g(s) + h(s)$

$((f+g)+h)(s) = (f+g)(s) + h(s) = f(s) + g(s) + h(s)$

Yani $f+(g+h) = (f+g)+h$ ✓

(iii) Sıfır eleman bir fonksiyon olmalıdır.

$\forall s \in S$ için $0(s) \triangleq 0$ olarak tanımlarsak

$\forall f \in V$ için $f + 0 = f$ olur. ✓

(iv) $\forall f \in V$ için $-f$ şöyle tanımlanırsa

$\forall s \in S$ için $(-f)(s) = -f(s)$

$\forall s \in S$ için $(f+(-f))(s) = f(s) - f(s) = 0 = 0(s)$ olduğundan

$f + (-f) = 0$ ✓

IV 'deki skaler çarpma şartlarına bakalım:

(i) $\forall \alpha \in F$, $\forall f \in V$ için $\alpha \cdot f \in V$ çünkü $\forall s \in S$ için $(\alpha \cdot f)(s) = \alpha \cdot f(s) \in F$ ✓

(ii) $\forall f \in V$ için $1 \cdot f = f$ çünkü $\forall s \in S$ için $(1 \cdot f)(s) = 1 \cdot f(s) = f(s)$ ✓

(iii) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ ve $\forall f \in V$ için

$$(\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot f))(s) = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot f)(s) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot f(s) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot f(s) \quad \forall s \in S$$

Yani $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot f) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot f$ ✓

(iv) $\forall \alpha \in F$ ve $\forall f, g \in V$ için

$$(\alpha \cdot (f + g))(s) = \alpha \cdot (f+g)(s) = \alpha \cdot (f(s) + g(s)) = \alpha \cdot f(s) + \alpha \cdot g(s) \quad \forall s \in S$$

Yani $\alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$ ✓

Tüm şartlar sağlandığından (V, F) bir vektör uzayıdır.

1.2.2. Altuzay

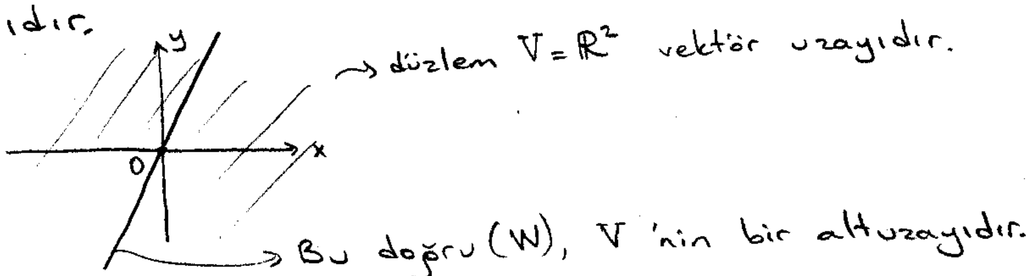
Tanım:

V kümesi, F cismî üzerinde bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayı için tanımlanmış vektörel toplama ve skaler çarpma işlemleriyle kendisi de bir vektör uzay oluşturan V 'nin herhangi bir altkümesi (W diyelim), V 'nin bir alt uzayıdır.

Örnekler:

1) $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun.

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ kümesi V 'nin bir alt uzayıdır.



Genel olarak, orijinden geçen her doğru, $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının altuzayıdır.

Benzer şekilde orijinden geçen her düzlem ve her doğru $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir alt uzayıdır.

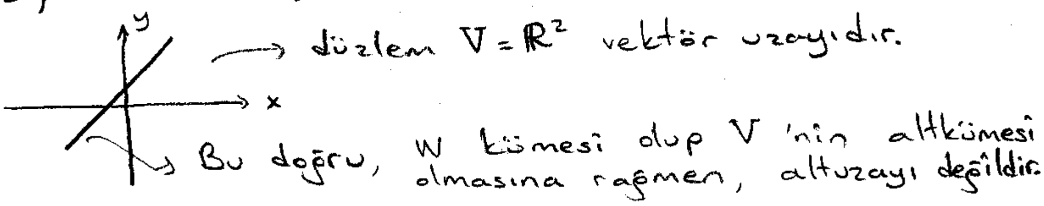
2) $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun.

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x\}$ kümesi V 'nin bir altuzayı değildir. Gösterelim:

$(x_1, y_1) \in W$ ve $(x_2, y_2) \in W$ olsun.

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$= (x_1 + x_2,\ 1 + x_1 + 1 + x_2) = (x_1 + x_2,\ 2 + x_1 + x_2) \notin W$



1.2.3. Teorem:

F cismi üzerinde tanımlanmış bir V vektör uzayının boş olmayan bir alt kümesi W olsun. W kümesi, V'nin bir altuzayıdır ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) her $w_1, w_2 \in W$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\alpha w_1 + w_2 \in W$ ise.

İspat:

$\Rightarrow$ (ancak): W, V'nin bir altuzayı ise $\alpha w_1 + w_2 \in W$, $\forall \alpha \in F$
Bu ifadenin doğruluğu, altuzay tanımı gereği açıkça görülmektedir.

$\Leftarrow$ (eğer): $w_1, w_2 \in W$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\alpha w_1 + w_2 \in W$ ise W bir altuzaydır.
Yukarıdaki ifadeyi ispatlayalım:

i) $\alpha = 1$ seçersek $1 \cdot w_1 + w_2 = w_1 + w_2 \in W$ (kapalılık öz.) ✓

ii) $\alpha = -1$ ve $w_1 = w_2$ seçersek

$$-1 \cdot w_1 + w_1 = 0 \in W \quad \text{(sıfır eleman)} \checkmark$$

iii) $w_2 = 0$ seçersek $\alpha w_1 + 0 = \alpha w_1 \in W$ ✓

iv) $\alpha = -1$, $w_2 = 0$ seçersek $-1 \cdot w_1 + 0 = -w_1 \in W$ (ters eleman) ✓

Tüm özellikleri taşıdığından dolayı W bir vektör uzaydır. W, aynı zamanda V'nin altkümesi olduğu için V'nin bir altuzayıdır.

1.2.4. Teorem:

$\{W_a\}$, (V, F) vektör uzayının bir altuzaylar topluluğu olsun. Bu durumda, $\bigcap_a W_a$ da (V, F) vektör uzayının bir altuzayıdır.

İspat:

Her a için W_a, V'nin altuzayı olduğundan $0 \in W_a$ $\forall a$. Yani $0 \in \bigcap_a W_a$. Demek ki $\bigcap_a W_a$ boş olmayan bir kümedir.

$w_1, w_2 \in \bigcap_a W_a$ olsun. $\Longrightarrow$ $w_1, w_2 \in W_a$ $\forall a$.

W_a, her a için bir alt uzay olduğundan

$$\alpha w_1 + w_2 \in W_a \quad \forall a, \; \forall \alpha \in F$$

Dolayısıyla $\alpha w_1 + w_2 \in \bigcap_a W_a$

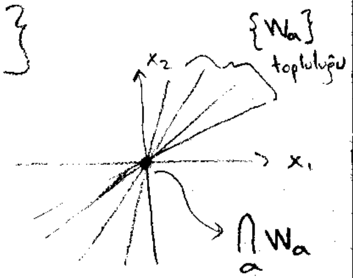
Bu yüzden $\bigcap_a W_a$, V'nin bir altuzayıdır.

Örnek:

$V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$

$W_a = \{ w = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a x_2 , \; a \in \mathbb{R} \}$

$\bigcap_a W_a = \{0\}$ bir altuzaydır.

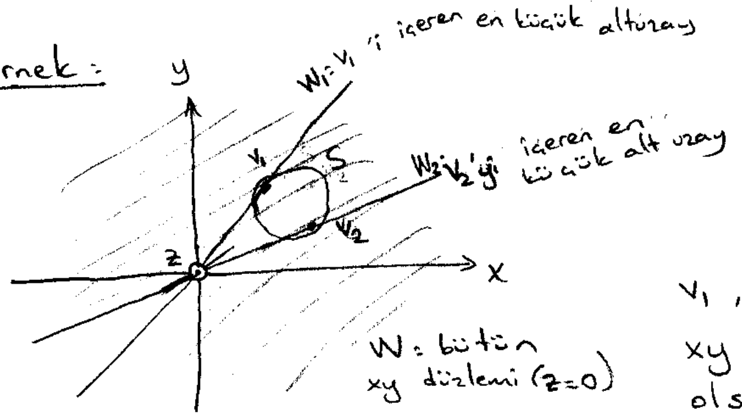


1.2.5. Gerilen Altuzay:

Tanım: S kümesi, F cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayının bir altkümesi olsun ($S \subset V$, Yani). W ise S kümesini içeren V'nin mümkün olan bütün altuzaylarının kesişimi olsun. Bu durumda W'ya, "S tarafından gerilen (spanned) altuzay" denir ($Sp(S) = W$).

Eğer S, sonlu sayıda vektörden oluşan bir küme ise – örneğin $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – bu durumda W'ya "$v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri tarafından gerilen altuzay" denir.

Örnek:



$F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{v_1, v_2\}$ ve v_1, v_2 vektörleri de xy düzlemi üzerinde olsun.

W_1 ve W_2 sırasıyla v_1 ve v_2'yi içeren en küçük alt uzaylardır. Ancak ikisi de tek başına S'i tamamen içeren alt uzay değildir. S'i tamamen içeren alt uzaylar bu iki doğrunun belirlediği düzlem olan xy düzlemi (z=0) ve V uzayının kendisidir. Bunların kesişimi de yine v_1 ve v_2 tarafından yani S tarafından gerilen xy düzlemidir. O halde

$$Sp(S) = W = \{ v = (x, y, z) \mid z = 0 \}$$

$v_1, v_2 \in V$ vektörleri, xy düzlemi üzerinde olmasaydı, yine v_1 ve v_2 tarafından belirlenen düzlem, S tarafından gerilen altuzay olurdu.

Örnek: $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$

ve v_1, v_2, v_3 vektörleri, vektör okuyla çizildiğinde düzlemsel olmayan 3 vektör (nokta) olsun. Bu durumda S'i tamamen içeren mümkün olan tek alt uzay, $V = \mathbb{R}^3$ olacağından,

$$Sp(S) = V = \mathbb{R}^3$$

olur.

1.2.6. Doğrusal Bileşim:

Tanım: Eğer bir (V,F) vektör uzayındaki bir v vektörünü, $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri cinsinden

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ifade edebileceğimiz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ skalerleri mevcutsa, v vektörüne "$v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimi" denir.

1.2.7. Teorem:

W kümesi (V,F) vektör uzayının, $S \subset V$ tarafından gerilen altuzayı olsun. Bu durumda W kümesi, S'in elemanlarının bütün doğrusal bileşimlerinden oluşan kümedir.

İspat: S'nin elemanlarının bütün doğrusal bileşimlerinden oluşan küme L olsun. $W = Sp(S)$ olduğundan $W = L$ olduğunu göstermeliyiz.

$i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $v_i \in S$ ve $c_i \in F$ olsun.

$$v \triangleq c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \in L$$

Açıkça $v \in W$ $\forall c_1, c_2, \dots, c_m \in F$ olduğundan $\boxed{L \subset W}$

$W = Sp(S)$ yani S'i içeren en küçük altuzay W olduğundan, L'nin bir altuzay olduğunu da gösterirsek, $L = W$ olduğu ispatlanmış olur.

$v, v' \in L$ olsun. $\forall \alpha \in F$ için $\alpha v + v' \in L$ olduğunu gösterebilirsek L bir altuzaydır. $v, v' \in L$ olduğundan

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \quad ; \quad v_i \in S \; ; \; i = 1, 2, \dots, m$$

$$v' = c_1' v_1' + c_2' v_2' + \dots + c_n' v_n' \quad ; \quad v_j' \in S \; ; \; j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha v + v' = \left(\sum_{i=1}^{m} (\alpha c_i) v_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' v_j' \right) \in L$$

olduğu açıkça görülmektedir. Bu yüzden L bir alt uzaydır. $L \subset W$ ve W da S'yi içeren en küçük altuzay olduğundan, $\underline{\underline{L = W}}$

1.2.8. Doğrusal Bağımlılık/Bağımsızlık:

Tanım:
(V, F) bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ olsun. Eğer hepsi birden sıfır olmayan (bazı) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ skalerleri için

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$$

oluyorsa S kümesinin "doğrusal bağımlı" olduğu söylenir.

Doğrusal bağımlı olmayan bir S kümesine de "doğrusal bağımsız" denir. Doğrusal bağımsız bir $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ için

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

demektir.

Dikkat:

1) Doğrusal bağımsız bir kümenin her alt kümesi de doğrusal bağımsızdır.
2) Bir kümenin herhangi bir alt kümesi doğrusal bağımlı ise, kümenin kendisi de doğrusal bağımlıdır.
3) Eğer bir küme sıfır vektör elemanını içeriyorsa doğrusal bağımlıdır. Çünkü $\forall c \in F$ için $c \cdot 0 = 0$.
4) Sonsuz sayıda vektör elemanından oluşan bir S kümesinin, sonlu sayıda elemanlı bütün altkümeleri doğrusal bağımsız ise S kümesi doğrusal bağımsızdır.

1.2.9. Taban:

Tanım: (V,F) bir vektör uzayı olsun. V'deki doğrusal bağımsız vektörlerden oluşan bir S kümesine, V vektör uzayının bir "tabanı" denir ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) V vektör uzayı S tarafından geriliyorsa ($Sp(S)=V$).

Eğer S sonlu sayıda elemanlı ise V'ye "sonlu boyutlu", sonsuz sayıda elemanlı ise "sonsuz boyutlu" denir.

Örnekler:

1) $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$, $S=\{v_1,v_2\}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ olsun.

(i) S'nin doğrusal bağımsız bir küme olduğunu gösterelim:

$c_1v_1+c_2v_2=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$ olmak zorunda mı?

$$c_1v_1+c_2v_2=c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c_1=c_2=0 \checkmark$$

(ii) $Sp(S)=V$ olduğunu gösterelim.

Önce $Sp(S)\subset V$ olduğunu görelim:

$$v\in Sp(S) \Rightarrow v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2, \quad \alpha_1,\alpha_2\in F$$

$$v=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\in V$$

Yani $\forall v\in Sp(S)$ için $v\in V$ olduğundan $Sp(S)\subset V$ $\checkmark$

Şimdi de $V\subset Sp(S)$ olduğunu görelim:

$$v\in V \Rightarrow v=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \quad a_1,a_2\in F$$

$v=a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ olarak yazılabileceğinden, $v\in Sp(S)$.

Yani $\forall v\in V$ için $v\in Sp(S)$ olduğundan, $V\subset Sp(S)$.

Ayrıca $Sp(S)\subset V$ olduğundan $V=Sp(S)$ olduğu görülür.

(i) ve (ii)'den dolayı, S kümesi V'nin bir tabanıdır.

2) $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$,

$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ olsun. S, V'nin bir tabanı mıdır?

Çözüm:

$Sp(S)=V$ olmasına rağmen, S doğrusal bağımlı olduğu için taban değildir.

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=0 \Rightarrow \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=-1 \text{ olabilir.}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$'ün hepsi birden sıfır olmadığı için S doğrusal bağımsız değildir.

3) $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^n$, $S=\{e_i\}_{i=1}^n$, $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\ldots$, $e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

olsun. S, V'nin bir tabanı mıdır?

Çözüm:

(i) S doğrusal bağımsızdır. Çünkü

$$c_1e_1+c_2e_2+\ldots+c_ne_n=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c_i=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

(ii) $x\in Sp(S) \Rightarrow x=\sum_{i=1}^n c_ie_i$ şeklinde yazılabilir ($c_i\in F$; $i=1,2,\ldots,n$).

Yani $x=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\in V=\mathbb{R}^n$. Dolayısıyla $Sp(S)\subset V$.

Diğer yandan

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V \Rightarrow x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$ şeklinde yazılabildiğinden, $x\in Sp(S)$. Yani $V\subset Sp(S)$

Buradan $Sp(S)=V$ olduğu görülür.

(i) ve (ii)'den dolayı S bir tabandır.

Not: $S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, $V=\mathbb{R}^n$'in standart (kanonik) tabanı olarak adlandırılır.

4) $F = \mathbb{C}$ ve $V = \{p \mid p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinom fonksiyon$\}$ olsun.

$p_n(x) \triangleq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$; $x \in \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{C}$; $i = 0, 1, \dots, n$

$S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ olsun (∞ sayıda elemanı var).

S, V'nin bir tabanı mıdır?

Çözüm:

(i) $Sp(S) = V$ olduğu gösterilebilir.

$p \in V \Rightarrow p = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \in Sp(S)$. Yani $V \subset Sp(S)$

$p \in Sp(S) \Rightarrow p = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \in V$. Yani $Sp(S) \subset V$.

(ii) $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ kümesinin doğrusal bağımsız olabilmesi için her sonlu alt kümesi doğrusal bağımsız olmalıdır. Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$S_n \triangleq \{1, x, \dots, x^n\} \quad \text{doğrusal bağımsızdır.}$$

Çünkü $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ olmak zorundadır. Zira bir polinomun sıfıra özdeş olması için $\forall x \in \mathbb{C}$ için sıfır olmalıdır. Hepsi birden sıfır olmayan $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ için sadece n adet x kökü için sıfır olması yeterli değildir. Çünkü bu polinomlar fonksiyondur.

$\forall n$ için S_n doğrusal bağımsız (dolayısıyla S_n'in her alt kümesi de doğrusal bağımsız) olduğundan S doğrusal bağımsızdır.

(i) ve (ii)'nin sonucu olarak S, V'nin bir tabanıdır.

1.2.10. Boyut:

Tanım: Bir V vektör uzayının tabanı n adet elemandan oluşuyorsa V vektör uzayı "n boyutludur" denir. Eğer taban sonsuz sayıda elemandan oluşuyorsa, V vektör uzayı "sonsuz boyutludur" denir.

1.3. DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER :

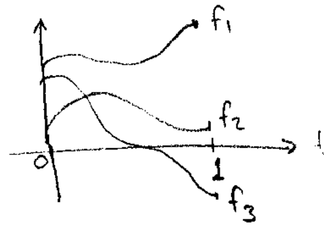
1.3.1. Tanım : V ve W, aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları olsun. Doğrusal bir dönüşüm ($\mathcal{A}$ ile gösterelim) V'den W'ya öyle bir bağıntıdır ki

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2)$$ şartını sağlar.

Burada $v_1, v_2 \in V$; $\alpha_1, \alpha_2 \in F$; ve $\mathcal{A}(v_1), \mathcal{A}(v_2) \in W$

Örnekler :

1) $F = \mathbb{R}$, $V \triangleq \{f \mid f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$



$W = \mathbb{R}$ olsun.

$\mathcal{A} : V \rightarrow W$ bağıntısı söyle tanımlanıyor :

$$f \in V \text{ olmak üzere } \quad \mathcal{A}(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

$\mathcal{A}$ doğrusal bir dönüşüm müdür?

Çözüm : $v_1, v_2 \in V$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ ise

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \int_0^1 (\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t))\,dt = \alpha_1 \int_0^1 v_1(t)dt + \alpha_2 \int_0^1 v_2(t)dt$$

$$= \alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2) \quad \checkmark$$ Doğrusal dönüşümdür.

2) $F = \mathbb{R}$, $V = \{f \mid f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}\}$, $W = \{f \mid f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}\}$ olsun. $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ bağıntısı söyle tanımlanıyor :

$v \in V$ olmak üzere $\quad \mathcal{A}(v) = v * h$

burada $h : [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve belirli bir h fonksiyonudur (hep aynı h). $\mathcal{A}$ doğrusal bir dönüşüm müdür?

Çözüm :

$$\mathcal{A}(v)(t) = \int_0^t v(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)(t) = \int_0^t [\alpha_1 v_1(t-\tau) + \alpha_2 v_2(t-\tau)]h(\tau)\,d\tau$$

$$= \alpha_1 \int_0^t v_1(t-\tau)h(\tau)d\tau + \alpha_2 \int_0^t v_2(t-\tau)h(\tau)d\tau = \alpha_1 \mathcal{A}(v_1)(t) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2)(t)$$

Yani, $\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2) \rightarrow \mathcal{A}$ doğrusal.

3) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ ve

$\mathcal{A}: V \to W$ şöyle tanımlanıyor:

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Bu dönüşüm doğrusaldır (Açıkça görüldüğü gibi):

$$\mathcal{A}(v) = w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 \end{bmatrix}$$

4) $F = V = W = \mathbb{R}$; $\mathcal{A}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlanıyor:

$$\mathcal{A}(v) = av + b \quad , \quad b \neq 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{A}$ doğrusal mıdır?

Çözüm:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = a\alpha_1 v_1 + a\alpha_2 v_2 + \underline{b}$$

$$\alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2) = a\alpha_1 v_1 + \underline{\alpha_1 b} + a\alpha_2 v_2 + \underline{\alpha_2 b} \quad \neq$$

$\mathcal{A}$ doğrusal değildir.

1.3.2. Teorem:

V ve W, aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ve $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\mathcal{A}(0_v) = 0_w$$

İspat:

$$\underbrace{0_v}_{\in V} = \underbrace{0}_{\in F} \cdot v \quad \forall v \in V \text{ olduğundan } \mathcal{A}(0_v) = \mathcal{A}(0 \cdot v) \underset{\text{doğrusallıktan}}{=} 0 \cdot \mathcal{A}(v) = 0_w$$

1.3.3. Sıfır uzayı:

Tanım: Doğrusal bir $\mathcal{A}: V \to W$ dönüşümünün sıfır uzayı $N(\mathcal{A})$, V'nin öyle bir altkümesidir ki $\mathcal{A}$ dönüşümü bu kümedeki her vektör için 0_W sonucunu verir.

Yani

$$N(\mathcal{A}) = \{ v \in V \mid \mathcal{A}(v) = 0_W \}$$

(V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları)

1.3.4. <u>Teorem:</u> $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm ise $N(\mathcal{A})$ kümesi V'nin bir altuzayıdır.

İspat: $v_1, v_2 \in N(\mathcal{A})$ ve $\alpha \in F$ olsun. $\alpha v_1 + v_2 \in N(\mathcal{A})$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\mathcal{A}(\alpha v_1 + v_2) = \alpha\,\mathcal{A}(v_1) + \mathcal{A}(v_2) = \alpha \cdot 0_W + 0_W = 0_W$$

Yani $\alpha v_1 + v_2 \in N(\mathcal{A})$. Dolayısıyla $N(\mathcal{A})$ bir altuzaydır.

<u>Örnek:</u>

$F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ ve $\mathcal{A}: V \to W$ söyle olsun:

$$\mathcal{A}(v) = w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}^{v}$$

$N(\mathcal{A}) = ?$

Çözüm:

$$w = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$ olduğundan $N(\mathcal{A}) = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v_1 = 0 \right\}$

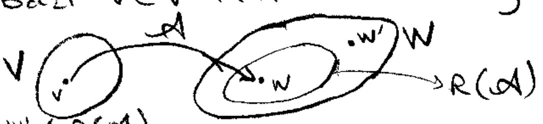
Yani $v_1 = 0 \Rightarrow w = 0_W$ olmaktadır.

1.3.5. <u>Görüntü (değer) uzayı:</u>

(V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzaylarıdır)

<u>Tanım:</u> Doğrusal bir $\mathcal{A}: V \to W$ dönüşümünün görüntü (değer) uzayı $R(\mathcal{A})$ W'nın söyle bir altkümesidir ki $\mathcal{A}$ dönüşümünün bazı $v \in V$ için sonucunun aldığı değerlerden oluşur. Yani

$$R(\mathcal{A}) = \{ w \in W \mid \text{Bazı } v \in V \text{ için } \mathcal{A}(v) = w \}$$



$\mathcal{A}(v') = w' \in W$ gibi bir $v' \in V$ mevcut değilse $w' \notin R(\mathcal{A})$

1.3.6. <u>Teorem:</u>

$\mathcal{A}: V \to W$ doğ. bir dönüşüm ise $R(\mathcal{A})$ kümesi W'nun bir altuzayıdır.

İspat: $w_1, w_2 \in R(\mathcal{A})$ ve $\alpha \in F$ olsun. $\alpha w_1 + w_2 \in R(\mathcal{A})$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$w_1, w_2 \in R(\mathcal{A})$ olduğundan, $w_1 = \mathcal{A}(v_1)$ ve $w_2 = \mathcal{A}(v_2)$ şartını sağlayan en az birer adet $v_1, v_2 \in V$ mevcuttur.

Buna göre: $\alpha w_1 + w_2 = \alpha \mathcal{A}(v_1) + \mathcal{A}(v_2) = \mathcal{A}(\alpha v_1 + v_2)$

$\alpha v_1 + v_2 \in V$ olduğundan $\alpha_1 w_1 + w_2 \in R(\mathcal{A})$

<u>Örnek:</u> $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ ve $\mathcal{A}: V \to W$ şöyle olsun:

$$\mathcal{A}(v) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{v}$$

$R(\mathcal{A}) = ?$

Çözüm:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

Yani hep $w_2 = 0$ ve $w_1 = -w_3$ çıkmaktadır. O halde

$$R(\mathcal{A}) = \left\{ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w_2 = 0 \text{ ve } w_1 = -w_3 \right\}$$

1.3.7. <u>Teorem:</u>

V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ve $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. $\mathcal{A}$ <u>birebir</u> (1-1) dir ancak ve eğer ($\Leftrightarrow$) $N(\mathcal{A}) = \{0_v\}$ ise

(Birebir tanımı: Eğer $\mathcal{A}(v_1) = \mathcal{A}(v_2)$ ise $v_1 = v_2$ olmak zorundaysa $\mathcal{A}$ birebirdir.)

İspat:

$\Leftarrow$ (eğer): $N(\mathcal{A}) = \{0_v\}$ ise

$v_1, v_2 \in V$ ve $v_1 \neq v_2$ olsun. Yani $v_1 - v_2 \neq 0_v$

Dolayısıyla $\mathcal{A}(v_1 - v_2) \neq 0_w \to \mathcal{A}(v_1) - \mathcal{A}(v_2) \neq 0_w$

$\mathcal{A}(v_1) \neq \mathcal{A}(v_2)$

(Farklı v'ler farklı $\mathcal{A}(v)$ vermek zorunda olduğundan $\mathcal{A}(v_1) = \mathcal{A}(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$ olmak zorundadır.)

$\mathcal{A}$ birebirdir.

$\Rightarrow$ (ancak): Bunu tezat yöntemiyle ispatlayalım.

($p \Rightarrow q$ önermesi ile $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğrulukları aynıdır)

p	q	$p \Rightarrow q$	q'	p'	$q' \Rightarrow p'$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

" $\mathcal{A}$ birebir $\Rightarrow N(\mathcal{A}) = \{0_v\}$ " yerine

" $N(\mathcal{A}) \neq \{0_v\} \Rightarrow \mathcal{A}$ birebir değildir" önermesini ispatlayalım:

$N(\mathcal{A}) \neq \{0_v\}$ ise en az bir $v \in N(\mathcal{A})$ mevcuttur öyle ki $v \neq 0_v$. Bu v için $\mathcal{A}(v) = 0_W$ 'dir.

Ayrıca doğrusallıktan $\mathcal{A}(0_v) = 0_W$ 'dir.

Hem $v \neq 0_v$ hem de 0_v için 0_W elde edilmesi $\mathcal{A}$ 'nın birebir olmasıyla tezat teşkil eder. Öyleyse

$N(\mathcal{A}) \neq \{0_v\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ birebir değildir.

Yani $\mathcal{A}$ birebir $\Rightarrow N(\mathcal{A}) = \{0_v\}$

1.4. KOORDİNATLAR:

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı düşünelim. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V 'nin sıralı bir tabanı olsun. Herhangi bir $v \in V$ vektörü, $v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak tek bir şekilde ifade edilebilir:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

(α_i 'lerin her biri tek bir değer alabilir, $\alpha_i \in \mathbb{R}$; $i=1, \dots, n$)

Bu α_i katsayıları takımını

$$[v]_{\mathcal{B}} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanan bir vektörle gösterelim. v ile $[v]_{\mathcal{B}}$ arasında birebir eşleme vardır.

$$v \overset{1-1}{\longleftrightarrow} [v]_{\mathcal{B}}$$

Bu yüzden $[v]_{\mathcal{B}}$, v vektörünün $\mathcal{B}$ tabanına göre gösterimi olarak adlandırılır.

α_i 'lere ise $(i=1, \dots, n)$, v vektörünün $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatları denir.

Örnek: Herhangi bir $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ elemanı için:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vektörü, $\bar{x}$ vektörünün kanonik tabana göre gösterimidir.

Örnek: $V = \mathbb{R}^{2\times2}$ 'de bir $v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ tabanına göre

gösterimini bulalım:

$$v = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, katsayılardan oluşan vektör gösterimimiz:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$ olur. $v \in \mathbb{R}^{2\times2}$ fakat $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^4$.

$v \xleftrightarrow{1-1} [v]_{\mathcal{B}}$ eşlemesi vardır.

Teorem:

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı için $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}'$ gibi sıralı iki taban düşünelim. V 'nin n-boyutlu olduğunu kabul edersek, $n\times n$ boyutlarında tekil olmayan ($\det \neq 0$) öyle bir P matrisi vardır ki her $v \in V$ için

$$[v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'} \quad \text{veya} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$ olur.

İspat: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ olsun.

Herhangi bir $v \in V$ için

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tek bir $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takımı ve

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' v_j' \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tek bir $\alpha_1', \dots, \alpha_n'$ takımı vardır.

$v'_j \in V$ olduğundan $j=1,\dots,n$ için

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot v_i$$

biçiminde $p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj}$ skalerleri mevcuttur. Buna göre

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j v'_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (p_{ij} \alpha'_j) \right)}_{\alpha_i} v_i$$

Yani $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \alpha'_j$; $i=1,2,\dots,n$. Dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{P \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \longrightarrow [v]_{\mathcal{B}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$$

P'nin tekil olmadığını yani tersinin mevcut olduğunu, aynı işlemleri tersten yaparak (v_i'lerin $\mathcal{B}'$ gösterimlerini kullanarak) gösterebilirdik. Şöyle de gösterebiliriz ki

$[v]_{\mathcal{B}'} = 0 \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = 0$ ve

$[v]_{\mathcal{B}} = 0 \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = 0$ (çünkü $[v]_{\mathcal{B}} = 0$ ise $v = 0_V \in V$ olmak zorunda ve $[0]_{\mathcal{B}'} = 0$)

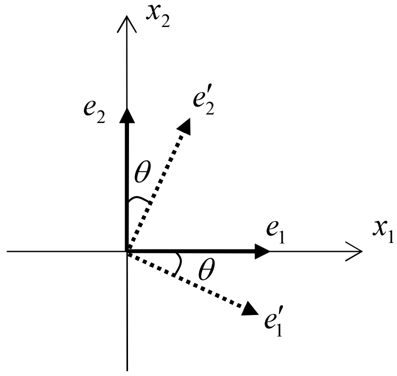
gereklilikleri tekil olmama tanımına uymaktadır.
($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ olmak zorundaysa A tekil değildir)

<u>Örnek:</u> $x \in \mathbb{R}^2$ ve $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olsun $\left([x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$.

$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ olmak üzere $[x]_{\mathcal{B}'} = P \cdot [x]_{\mathcal{B}}$ olan $\mathcal{B}'$ tabanını bulalım:

$\mathcal{B}' = \{ e'_1 , e'_2 \}$ dersek, $[e'_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $[e'_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur. Yani $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 \end{bmatrix}$. Çünkü $[e'_1]_{\mathcal{B}} = e'_1$ ve $[e'_2]_{\mathcal{B}} = e'_2$. Dolayısıyla: $\begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 \end{bmatrix} = P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

bulunur. Yani $e'_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$ ve $e'_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$



<u>Not:</u> Dik eksen takımlarına göre koordinatlara, ortogonal (tersi transpozuna eşit) matrislerle yapılan koordinat dönüşümlerinde yeni eksenler yine birbirine dik olur ve uzunluk (Öklidyen norm) ölçüleri aynı kalır.

1.5. DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ:

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı V ve W vektör uzayları ve $\mathcal{A}: V \to W$ biçiminde doğrusal bir dönüşüm düşünelim. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sırasıyla V ve W 'nın sıralı tabanları olsun.

$j = 1, 2, \dots, n$ için $\mathcal{A}(v_j) \in W$ olduğundan, $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ gibi öyle tek bir skaler takımı mevcuttur ki

$$\mathcal{A}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \qquad \text{yani} \qquad [\mathcal{A}(v_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Herhangi bir $v \in V$ için $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ olduğundan

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A}(v_j) \qquad \text{(doğrusallıktan)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \right)$$

$$w = \mathcal{A}(v) = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} (A_{ij} \alpha_j) \right] w_i \qquad (1)$$

Diğer yandan $w \in W$ olduğundan $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ gibi öyle tek bir skaler takımı vardır ki

$$\mathcal{A}(v) = w = \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \qquad (2)$$

(1) ve (2) 'deki w_i katsayılarını karşılıklı eşitlersek

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_j \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

olduğu görülür.

Yani $[\mathcal{A}(v)]_{\mathcal{B}'} = [w]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ve $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

olmak üzere

$$[w]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

A matrisine $\mathcal{A}$ doğrusal dönüşümünün matris gösterimi denir. (belirli tabanlara göre)

<u>Örnek:</u> $F=\mathbb{R}$, $V=W=\mathbb{R}^2$ ve $\mathcal{A}:V\to W$ şöyle tanımlanıyor:

$\forall v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in V$ için $\mathcal{A}(v)=\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$

$\mathcal{B}=\mathcal{B}'=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{v_1=w_1},\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{v_2=w_2}\right\}$ olsun. $\mathcal{A}$'nın matris gösterimini (A) bulalım:

$$\mathcal{A}(v_j)=\sum_{i=1}^{m}A_{ij}w_i \quad ; \quad j=1,2$$

$$\mathcal{A}(v_1)=\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=A_{11}w_1+A_{21}w_2=A_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+A_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{bmatrix}\longrightarrow \underline{A_{11}=1,\ A_{21}=0}$$

$$\mathcal{A}(v_2)=\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=A_{12}w_1+A_{22}w_2=A_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+A_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}A_{12}\\A_{22}\end{bmatrix}\longrightarrow \underline{A_{12}=0,\ A_{22}=0}$$

Demek ki $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$: $\mathcal{A}$'nın matris gösterimi.

<u>Örnek:</u> $F=\mathbb{R}$, $V=\{p \mid p$, 3. dereceye kadarki polinom fonksiyon$\}$

Yani $p\in V \Rightarrow p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$, $x\in\mathbb{R}$

$\mathcal{A}:V\to V$

$\mathcal{A}(p)(x)\triangleq\dfrac{dp(x)}{dx}$ olarak tanımlanıyor.

$\mathcal{B}=\mathcal{B}'=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}\triangleq\{1,x,x^2,x^3\}$ olsun.

$\mathcal{A}$ dönüşümünün matris gösterimini (A) bulalım:

$$\mathcal{A}(p_j)=\sum_{i=1}^{4}A_{ij}p_i \quad ; \quad j=1,2,3,4$$

$\mathcal{A}(p_1)(x)=\dfrac{d}{dx}(1)=0=0\cdot p_1+0\cdot p_2+0\cdot p_3+0\cdot p_4=\sum_{i=1}^{4}A_{i1}p_i \to A_{i1}=0;\ i=1,\dots,4$ (1. sütun hep 0)

$\mathcal{A}(p_2)(x)=\dfrac{d}{dx}(x)=1=1\cdot p_1+0\cdot p_2+0\cdot p_3+0\cdot p_4=\sum_{i=1}^{4}A_{i2}\cdot p_i$

$\mathcal{A}(p_3)(x)=\dfrac{d}{dx}(x^2)=2x=0\cdot p_1+2\cdot p_2+0\cdot p_3+0\cdot p_4=\sum_{i=1}^{4}A_{i3}\cdot p_i$

$\mathcal{A}(p_4)(x)=\dfrac{d}{dx}(x^3)=3x^2=\underbrace{0}_{A_{14}}\cdot p_1+\underbrace{0}_{A_{24}}\cdot p_2+\underbrace{3}_{A_{34}}\cdot p_3+\underbrace{0}_{A_{44}}\cdot p_4=\sum_{i=1}^{4}A_{i4}\cdot p_i$

$\mathcal{A}$'nın matris gösterimi (verilen tabanlar için):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : \text{Türev işleminin } (V \to V) \text{ gösterimi.}$$

Yani

$$\left[\frac{dp}{d(\cdot)} \right]_{\mathcal{B}} = A \cdot [p]_{\mathcal{B}}$$

Örnek:

$F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{2\times2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ ve

$\mathcal{A} : V \to V$ doğrusal dönüşümü, $C \in V$ belirli bir matris olmak üzere $\left(C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$

$\mathcal{A}(X) = CX + XC^T \quad \forall X \in V$ olarak tanımlanıyor.

$\mathcal{A}$'nın matris gösterimini (A) bulalım:

$\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ ile gösterelim (sırasıyla)

$$\mathcal{A}(E_j) = \sum_{i=1}^{4} A_{ij} E_i \quad ; \quad j = 1, \dots, 4$$

$$\mathcal{A}(E_1) = CE_1 + E_1 C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} A_{i1} E_i = \underset{A_{11}}{0} \cdot E_1 \underbrace{-1}_{A_{21}} \cdot E_2 \underbrace{-1}_{A_{31}} \cdot E_3 + \underset{A_{41}}{0} \cdot E_4$$

$$\mathcal{A}(E_2) = CE_2 + E_2 C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} A_{i2} E_i = \underbrace{+1}_{A_{12}} \cdot E_1 + \underbrace{0}_{A_{22}} \cdot E_2 + \underbrace{0}_{A_{32}} \cdot E_3 \underbrace{-1}_{A_{42}} \cdot E_4$$

$$\mathcal{A}(E_3) = CE_3 + E_3 C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} A_{i3} E_i = \underset{A_{13}}{1} \cdot E_1 + \underset{A_{23}}{0} \cdot E_2 + \underset{A_{33}}{0} \cdot E_3 \underbrace{-1}_{A_{43}} \cdot E_4$$

$$\mathcal{A}(E_4) = CE_4 + E_4 C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} A_{i4} E_i = \underset{A_{14}}{0} \cdot E_1 + \underset{A_{24}}{1} \cdot E_2 + \underset{A_{34}}{1} \cdot E_3 + \underset{A_{44}}{0} \cdot E_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad : \mathcal{A} \text{ dönüşümünün } \mathcal{B} \text{ tabanına göre matris gösterimi.}$$

1.6. GÖRÜNTÜ UZAYI ($R(\mathcal{A})$) ve SIFIR UZAYININ ($N(\mathcal{A})$) BULUNMASI

V ve W aynı F cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzay, $\dim(V)=n$ ve $\dim(W)=m$ olsun. $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. Bilindiği gibi $N(\mathcal{A})$, V'nin bir altuzayı, $R(\mathcal{A})$ da W'nun bir altuzayıdır.

1.6.1. Teorem: $\dim(R(\mathcal{A})) + \dim(N(\mathcal{A})) = n$

İspat: $\dim(N(\mathcal{A})) = k$ olsun. $\{v_1, \dots, v_k\}$ kümesi de $N(\mathcal{A})$'nın bir tabanı olsun ($N(\mathcal{A})$'yı geren doğrusal bağımsız vektörler kümesi). Öyle $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \in V$ vektörleri seçelim ki $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ kümesi V'nin bir tabanı olsun. Yani her bir $v \in V$ için $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gibi öyle tek bir skaler takımı mevcuttur ki

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \to \mathcal{A} \text{ dönüşümünü uygularsak:}$$

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{\mathcal{A}(v_i)}_{0} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}(v_i)$$

çünkü $v_i \in N(\mathcal{A})$ $1 \le i \le k$ için

$$\mathcal{A}(v) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}(v_i) \quad \to \text{Yani } R(\mathcal{A}) \text{ vektör uzayı } \{\mathcal{A}(v_{k+1}), \mathcal{A}(v_{k+2}), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$$

tarafından gerilmektedir. Eğer bu kümenin bir taban olduğunu gösterebilirsek $R(\mathcal{A})$'nın $(n-k)$ boyutlu olduğu anlaşılır. Bunun için de $\{\mathcal{A}(v_{k+1}), \mathcal{A}(v_{k+2}), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$ kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu göstermeliyiz:

Tezat yöntemiyle gösterelim. Bu kümenin doğrusal bağımlı olduğunu kabul edersek, hepsi birden sıfır olmayan $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ gibi öyle bir skaler takımı mevcut olmalıdır ki

$$\beta_{k+1} \mathcal{A}(v_{k+1}) + \beta_{k+2} \mathcal{A}(v_{k+2}) + \dots + \beta_n \mathcal{A}(v_n) = 0_w$$

Doğrusallıktan $\mathcal{A}\left(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i v_i\right) = 0_w$ olmalıdır. Yani

$\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i v_i \in N(\mathcal{A})$ olmalıdır. O halde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ gibi ($\dim N(\mathcal{A}) = k$ idi) öyle bir skaler takımı mevcut olmalıdır ki

$$\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i$$ olsun. Bu durumda

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_k v_k + (-\beta_{k+1}) v_{k+1} + (-\beta_{k+2}) v_{k+2} + \ldots + (-\beta_n) v_n = 0$$

olmalıydı. $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, -\beta_{k+1}, \ldots, -\beta_n$ skalerlerinin hepsi birden sıfır olmadığı için (en azından β'lar için böyle), $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ kümesinin doğrusal bağımlı olması gerekirdi. Halbuki bu küme V'nin bir tabanı olduğundan doğrusal bağımsızdır. O halde $\{\mathcal{A}(v_{k+1}), \mathcal{A}(v_{k+2}), \ldots, \mathcal{A}(v_n)\}$ kümesinin doğrusal bağımlı olması bir tezattır. Yani doğrusal bağımsızdır. Dolayısıyla

$\{\mathcal{A}(v_{k+1}), \mathcal{A}(v_{k+2}), \ldots, \mathcal{A}(v_n)\}$ kümesi $R(\mathcal{A})$'nın bir tabanıdır. O halde $\dim(R(\mathcal{A})) = n-k$ olur. Yani

$$\dim(R(\mathcal{A})) + \dim(N(\mathcal{A})) = n$$

1.6.2. Rank:

Tanım: $\mathcal{A}: V \to W$ doğrusal dönüşümünün $\mathcal{B}$ (V'nin tabanı) ve $\mathcal{B}'$ (W'nun tabanı) tabanlarına göre matris gösterimi A olsun. A'nın rankı şöyle tanımlanır:

$$\text{rank}(A) \triangleq \dim(R(\mathcal{A}))$$

Not:

(i) rank(A), A'daki doğrusal bağımsız kolonların (veya satırların) sayısıdır.

(ii) rank(A), A'nın determinantı sıfır olmayan $r \times r$ altmatrisleri için mümkün olan en büyük r tamsayısıdır.

1.6.3. Temel Kolon İşlemleri (t.k.i):

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gerçel bir matris olsun. 3 çeşit tki vardır:

(i) Bir kolonu sıfırdan farklı gerçel bir sayıyla çarpmak.

(ii) Bir kolonu gerçel bir sayıyla çarpıp diğer bir kolona eklemek.

(iii) Herhangi iki kolonu yer değiştirmek.

1.6.3.1. <u>Teorem:</u> Eğer tki ile A matrisinden B matrisi elde ediliyorsa yine tki ile B matrisinden A matrisi elde edilebilir.
(İspatı gayet açık görülebilir)

1.6.3.2. <u>Not:</u>

(i) $m \times n$ boyutlarındaki bir A matrisi üzerindeki her bir tki, A matrisini $n \times n$ boyutlu tekil olmayan bir E matrisiyle sağdan çarpmaya karşılık gelir, ki bu E matrisi, I_n birim matrisi üzerinde aynı tki yapılmasıyla bulunacak matristir.

<u>Örnek:</u>

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{tki} B = \begin{bmatrix} a_{11} & c \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c \cdot a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Aynı tki ile

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{tki} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = A \cdot E$$

(ii) Bir dizi tki'ye karşılık gelen sağdan çarpılan $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrislerinin sırasıyla sağdan çarpımıyla elde edilen $E = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$ matrisi de I_n matrisine aynı tki'lerin sırasıyla uygulanmasıyla elde edilir. E tekil olmayan bir matristir.

$$A \xrightarrow{tki} B = A E_1 E_2 \ldots E_k = AE, \qquad E = E_1 E_2 \ldots E_k, \quad \det(E) \neq 0$$

Örnek.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{tki} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{tki} B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = B$$

1.6.3.2. <u>Tanım:</u> Eğer tki ile A'dan B elde edilebiliyorsa B matrisi A matrisinin "kolon eşdeğeridir". $B \overset{tki}{\sim} A$ ile göstereceğiz.

<u>Not.</u>

$$B \overset{tki}{\sim} A \iff A \overset{tki}{\sim} B$$

1.6.3.3. Teorem:

$$A \overset{tki}{\sim} B \implies R(A) = R(B)$$

İspat:

$B \overset{tki}{\sim} A \Rightarrow B = AE \qquad (\det(E) \neq 0$ olmak üzere$)$

(i) $R(A) \subset R(B)$ olduğunu gösterelim.

$x \in R(A) \Rightarrow$ öyle bir $y \in \mathbb{R}^m$ mevcuttur ki $Ay = x$

$\det(E) \neq 0$ olduğundan $A = BE^{-1} \rightarrow B\underbrace{E^{-1}y}_{y' \text{ olsun.}} = x$

Demek ki $x \in R(A) \Rightarrow$ öyle bir $y' \in \mathbb{R}^m$ mevcuttur ki $By' = x$
Yani $x \in R(B)$. Yani $R(A) \subset R(B)$

(ii) $R(B) \subset R(A)$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

$x \in R(B) \Rightarrow$ öyle bir $y \in \mathbb{R}^m$ mevcuttur ki $By = x$
Yani $A\underbrace{Ey}_{y' \text{ olsun.}} = x$

Demek ki $x \in R(B) \Rightarrow$ öyle bir $y' \in \mathbb{R}^m$ mevcuttur ki $Ay' = x$
Yani $x \in R(A)$. Yani $R(B) \subset R(A)$

(i) ve (ii) 'den dolayı $R(A) = R(B)$

Sonuç: Görüntü uzayı, tki ile değişmez. Öyleyse $R(A)$ için bir taban bulmak için $B \overset{tki}{\sim} A$ olmak üzere $R(B)$ için bir taban bulabiliriz. Bu aynı zamanda $R(A)$ için de bir taban olur.

1.6.4. Teorem:

$\mathbb{R}^m$ 'deki vektörlerden oluşan $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ kümesi veriliyor. $k_i \triangleq$ "x_i 'nin üstten ilk sıfırdan farklı elemanının sıra numarası" (örneğin $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ için $k = 3$, 3. sıradaki $\neq 0$) olarak tanımlayalım.

$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots \leq m \implies \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ kümesi doğrusal bağımsızdır.

1.6.5. R(A) için bir taban bulma algoritması:

A, $m \times n$ boyutlarında bir matris olsun.

Adım 1) $i=1$

Adım 2) Tüm $l<i$ 'ler için $a_{lk}=0$ fakat $a_{ik} \neq 0$ olan en küçük k'yı bulun. Böyle bir k yoksa Adım 4'e gidin.

Adım 3) $j>k$ için $a_{ij} \neq 0$ (ve her $l<i$ için $a_{lj}=0$) olan her j. kolonun üzerine, k. kolonu $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ik}}\right)$ ile çarpıp ekleyin.
(Böylece her $j>k$ için yeni a_{ij} sıfır olur.)

Adım 4) $i=m$ ise durun, sıfırdan farklı kolon/vektörler, R(A)'nın bir tabanıdır.
$i<m$ ise i'yi 1 artırıp Adım 2'ye gidin.

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 5} \qquad m=4$$

Adım 1) $i=1$

Adım 2) $k=1$ $\quad (\underset{\hookrightarrow k=1}{a_{11} \neq 0})$

Adım 3) $j=2,3,4,5$ için $a_{1j} \neq 0$ olduğundan $k=1$. kolonu $\left(-\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)$ ile çarpıp j. kolona ekliyoruz.

$$A \overset{tki}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{elde ettik.}$$

Adım 4) $i=1+1=2$

Adım 2) Şartlara uygun k mevcut değil.

Adım 4) $i=2+1=3$

Adım 2) $k=2$ $\quad (a_{\underset{i}{3}\underset{k}{2}} \neq 0)$

Adım 3) $j=4,5$ için $a_{3j} \neq 0$ olduğundan, $k=2$. kolonu $\left(-\frac{a_{3j}}{a_{32}}\right)$ ile çarpıp j. kolona ekliyoruz.

$$A \overset{tki}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{elde ettik.}$$

Adım 4) $i = 3+1 = 4$

Adım 2) $k=3$ $\quad (a_{43} \neq 0)$

Adım 3) $j=4,5$ için $a_{4j} \neq 0$ olduğundan, $k=3$. kolonu $\left(-\frac{a_{4j}}{a_{43}}\right)$ ile çarpıp j. kolona ekliyoruz.

$$A \overset{tki}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & \underbrace{0 \quad 0}_{\text{sıfır kolonlar}} \end{bmatrix} \quad \text{elde ettik}$$

Adım 4) $i=4$ olduğundan duruyoruz. Sıfırdan farklı kolonlar kümesi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad R(A) \text{'nın bir tabanıdır.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad m=3$$

$i=1$ için

$k=2$ $(a_{12} \neq 0)$ $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$i=2$ için

$k=1$ $(a_{21} \neq 0)$ $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i=3=m$ için

k mevcut değil.

sıfırdan farklı kolonların kümesi $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$R(A)$'nın bir tabanıdır.

Not: 1.6.4 Teoremine göre, algoritma sonunda elde edilen matrisin kolonları $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ olacak şekilde yer değiştirilip son $n-r$ kolonu sıfır vektör olacak şekilde düzenlenirse ilk r kolonun doğrusal bağımsız olduğu görülür. Bu yüzden de $R(A)$'nın bir tabanı olur. (Bu r adet kolonun sırası farklı da olsa yine aynı kümedir.)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \times & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \times & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \times & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & 0 & & 0 \end{array}\right]_{m\times n}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{r adet sıfırdan farklı kolon}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{n-r adet sıfır kolon.}}$

1.6.6. Temel Satır İşlemleri (ts.i.)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gerçel bir matris olsun. 3 çeşit tsi. vardır:

(i) Bir satırı sıfırdan farklı gerçel bir sayıyla çarpmak.

(ii) Bir satırı gerçel bir sayıyla çarpıp diğer bir satıra eklemek.

(iii) Herhangi iki satırı yer değiştirmek.

1.6.6.1. Bazı Tanım ve gerçekler:

2) Eğer tsi ile A matrisinden B matrisi elde ediliyorsa, yine tsi ile B matrisinden A matrisi elde edilebilir. (İspatı gayet açık görülebilir) $(B \overset{tsi}{\sim} A \Leftrightarrow A \overset{tsi}{\sim} B)$

1) Eğer tsi ile A matrisinden B matrisi elde edilebiliyorsa B matrisi A matrisinin "satır eşdeğeridir" ve $B \overset{tsi}{\sim} A$ ile göstereceğiz.

3) $m\times n$ boyutlarındaki bir A matrisi üzerindeki bir dizi tsi, A matrisini $m\times m$ boyutlu tekil olmayan bir E matrisiyle soldan çarpmaya karşılık gelir, ki bu E matrisi, I_m birim matrisi üzerinde sırasıyla aynı tsi'lerinin yapılmasıyla bulunacak matristir. (İspatı açık)

1.6.6.2. Teorem:

$$A \overset{tsi}{\sim} B \implies N(A) = N(B)$$

İspat: $A \overset{tsi}{\sim} B \implies B = EA$ ve $A = E'B$ (E ve E' tekil olmayan olmak üzere birer E ve E' mevcuttur.) (Aslında $E' = E^{-1}$)

(i) $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \rightarrow \underbrace{E \cdot A}_{B} x = 0 \rightarrow Bx = 0 \rightarrow x \in N(B)$

Yani $N(A) \subset N(B)$

(ii) $x \in N(B) \Rightarrow Bx = 0 \rightarrow \underbrace{E' B}_{A} x = 0 \rightarrow Ax = 0 \rightarrow x \in N(A)$

Yani $N(B) \subset N(A)$

Dolayısıyla $N(A) = N(B)$

1.6.7. <u>$N(A)$ için bir taban bulma algoritması:</u> (A: $m \times n$ matris)

Algoritmanın 3 evresi vardır.

I. Evre:

Adım 1) $j = 1$

Adım 2) Tüm $l < j$'ler için $a_{kl} = 0$ fakat $a_{kj} \neq 0$ olan en küçük k tamsayısını bulun. Böyle bir k yoksa Adım 4'e gidin.

Adım 3) $a_{ij} \neq 0$ olan her $i \neq k$ için k. satırı $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{kj}}\right)$ ile çarpıp i. satıra ekleyin.

Adım 4) $j = n$ ise durun, değilse j'yi 1 artırıp Adım 2'ye gidin.

II. Evre: Satırların yer değiştirilmesi:

Satırları öyle bir şekilde yer değiştirin ki tamamı sıfır olan satırlar en alta gelsin <u>ve</u> sıfırdan farklı elemanı olan satırlar (r adet) için, k_i: i. satırdaki sıfırdan farklı soldan ilk elemanın sıra numarası olmak üzere, $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ olsun.

Yani bu düzenlemeyle elde edilecek $\overline{A} \overset{tsi}{\sim} A$ matrisi şu üç özelliğe sahip olacaktır:

a) $r+1$. $r+2$., ..., m. satırlar tamamen sıfır olacak.

b) $i = 1, 2, \ldots, r$ için, i. satırda k_i. elemanın ((i,k_i)'nin) solundaki tüm elemanlar sıfır olacak.

c) Yine $i = 1, 2, \ldots, r$ için k_i. kolonda i. elemanın (yine (i,k_i)'nin) üzerindeki tüm elemanlar sıfır olacak (I. Evre'nin 3. Adımından dolayı)

Bu evrede şu tanımlar da yapılır:

$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ olmak üzere

$K = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ ve

$L \triangleq \{1, 2, \dots, n\} - K = \{l_1, l_2, \dots, l_{n-r}\}$

(L'deki indisler, K'da mevcut olmayan ve 1 ile n arasındaki indislerdir, ki bunlar için de

$1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{n-r} \leq n$

(Aynı zamanda $K \cup L = \{1, 2, \dots, n\}$)

III. Evre: N(A) için taban bulunması:

vektör (yani L'deki her bir eleman için ayrı bir defa)

$\bar{A} x_{l_i} = 0$ denklemini $n-r$ defa çözün, fakat her defasında x_{l_i}'nin sırayla L'deki bir indisli elemanını 1, L'deki diğer indisli elemanlarını 0 alın. Kolaylık olması için

x_{l_i} vektörünün üstten l_j. elemanı

$x_{l_i}^{l_j} = \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i=j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$ seçelim. Her defasında x_{l_i}'nin K'daki indisli elemanlarını çözmeye çalışacağız ($x_{l_i}^{k_j} \to$ bilinmeyen; $j = 1, \dots, r$). Bulacağımız denklemler $a_{jk_j} x_{l_i}^{k_j} + a_{jl_i} = 0$ biçiminde olacağından, $x_{l_i}^{k_j} = -\dfrac{a_{jl_i}}{a_{jk_j}}$ olarak bulunur.

Sonuçta, bu x_{l_i}'lerden oluşan $\mathcal{B} = \{x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-r}}\}$ kümesi, $N(A) = N(\bar{A})$ için bir taban olacaktır. (İspatı örneklerden sonra)

<u>Örnek:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & 7 & -2 & -13 \end{bmatrix}_{4\times4} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 10 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

(zaten düzenlenmiş çıktığı için)

$k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $K = \{1, 2\}$

$l_1 = 3$, $l_2 = 4$, $L = \{3, 4\}$

$$\underset{x_3}{x_{l_1}} = \begin{bmatrix} x_{l_1}^1 \\ x_{l_1}^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to x_{l_1}^{l_1} \\ \to x_{l_1}^{l_2} \end{matrix} \qquad \bar{A} x_{l_1} = \begin{bmatrix} x_{l_1}^1 + \frac{1}{2} \\ 2x_{l_1}^2 - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_{l_1}^1 = -\frac{1}{2}$, $x_{l_1}^2 = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $\underset{x_3}{x_{l_1}} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_{l_2} = \begin{bmatrix} x_{l_2}^1 \\ x_{l_2}^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to x_{l_2}^{l_1} \\ \to x_{l_2}^{l_2} \end{matrix} \qquad \bar{A} x_{l_2} = \begin{bmatrix} x_{l_2}^1 - 2 \\ 2x_{l_2}^2 - 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_4

$$x_{l_2}^1 = 2 \;,\; x_{l_2}^2 = 1 \longrightarrow x_{l_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_4

$$\{x_{l_1}, x_{l_2}\} = \{x_3, x_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ kümesi $N(A)$ için bir tabandır.

Gerçekten de sağlamasını yaparsak:

$$A x_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & 7 & -2 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$A x_{l_2} = A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Örnek: $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad n = 4$$

I. evre

$$\overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4/3 & 2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

II. evre $K = \{1, 2, 3\}$ $\qquad L = \{4\}$

III. evre $\bar{A}x = 0$ denklemini 1 defa (L'nin eleman sayısı) çözüyoruz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4^1 \\ x_4^2 \\ x_4^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_4^1 \\ -\frac{3}{2}x_4^2 + \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3}x_4^3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_4

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{x_4\}$

Gerçekten de $$A x_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad n=3$$

$$\overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} \overset{tsi}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$K = \{1, 2, 3\}$ $\qquad L = \{\ \}$

$\bar{A}x = 0$ denklemini 0 defa çözüyoruz. Yani çözmeye gerek de yok. $\mathcal{B} = \{\ \}$

Çünkü $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

1.6.8. Teorem:
Az önceki algoritmayla bulunan $\underbrace{\{x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-r}}\}}_{=\mathcal{B}}$ kümesi, $N(A)$ için bir tabandır.

İspat: 2 şeyi göstermemiz ispat için yeterlidir:
(i) $\mathcal{B}$ kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu
(ii) $Sp(\mathcal{B}) = N(A)$ olduğunu

(i) $\alpha_{l_1} x_{l_1} + \dots + \alpha_{l_{n-r}} x_{l_{n-r}} = 0 \implies \alpha_{l_1} = \dots = \alpha_{l_{n-r}} = 0$

olmak zorundadır; Çünkü algoritmanın III. evresinde x_{l_i} vektörünün her bir l_i için, L'deki farklı bir indisli elemanı 1, L'deki diğer indisli elemanları sıfır olduğundan

$\alpha_{l_1} x_{l_1} + \dots + \alpha_{l_{n-r}} x_{l_{n-r}} = 0$ vektörel denkleminin L'deki indisli skaler denklemlerini biraraya getirirsek

$$\begin{bmatrix} \alpha_{l_1} \\ \vdots \\ \alpha_{l_{n-r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

(ii) a) Önce $Sp(\mathcal{B}) \subset N(A)$ olduğunu gösterelim.

$\hat{x} \in Sp(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) \implies \hat{x} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{l_i} x_{l_i}$ yazılabilir.

$\bar{A}\hat{x} = \bar{A} \cdot \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{l_i} x_{l_i} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{l_i} \underbrace{\bar{A} x_{l_i}}_{0 \text{ (III. evreden)}} = 0$ Yani $\hat{x} \in N(\bar{A}) = N(A)$
Demek ki $Sp(\mathcal{B}) \subset N(A)$

b) Şimdi de $N(A) \subset Sp(\mathcal{B})$ olduğunu gösterelim:

$\hat{x} \in N(A) \Rightarrow \hat{x} \in N(\bar{A}) \Rightarrow \bar{A}\hat{x} = 0$

Bu denklemin j. satırı: $a_{jk_j} \hat{x}^{k_j} + \sum_{i=1}^{n-r} a_{jl_i} \hat{x}^{l_i} = 0$

$$\rightarrow \hat{x}^{k_j} + \sum_{i=1}^{n-r} \hat{x}^{l_i} \cdot \underbrace{\frac{a_{jl_i}}{a_{jk_j}}}_{-x_{l_i}^{k_j}} = 0$$

$$\rightarrow \hat{x}^{k_j} = \sum_{i=1}^{n-r} \hat{x}^{l_i} \cdot x_{l_i}^{k_j}$$: $\hat{x}$ 'nın K'daki indisli elemanları $(j=1,\dots,r)$

Diğer yandan

$$\hat{x}^{l_p} = \sum_{i=1}^{n-r} \hat{x}^{l_i} \cdot x_{l_i}^{l_p}$$: $\hat{x}$ 'nın L'deki indisli elemanları $(p=1,\dots,n-r)$

$\hat{x}$ 'nın hem K'daki hem de L'deki indisli yani bütün elemanları ($K \cup L = \{1,2,\dots,n\}$ idi) için benzer şekilde olduğundan

$$\underbrace{\hat{x}}_{\text{vektör}} = \sum_{i=1}^{n-r} \underbrace{\hat{x}^{l_i}}_{\text{skaler}} \cdot \underbrace{x_{l_i}}_{\text{vektör}}$$

biçiminde x_{l_i} 'lerin doğrusal bileşimi şeklinde yazılabilir.

Demek ki $\hat{x} \in Sp(\mathcal{B})$. Yani $N(A) \subset Sp(\mathcal{B})$

Böylece $\mathcal{B} = \{x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}\}$ kümesinin, $N(A)$ için bir taban olduğu ispatlanmış olur.

1.6.9. <u>Sonuçlar:</u> $A : m \times n$ matris ise

1) $\dim(R(A)) + \dim(N(A)) = n$

$\dim(R(A)) = r \Rightarrow \dim(N(A)) = n-r$

2) $m \leq n$ ise

$0 \leq \dim(R(A)) \leq m$

$n-m \leq \dim(N(A)) \leq n$

3) $n \leq m$ ise

$0 \leq \dim(R(A)) \leq n$

$0 \leq \dim(N(A)) \leq n$

Yani $0 \leq \dim(R(A)) \leq \min(m,n)$

Örnek: $\dim(N(A)) = 0 \Rightarrow n \leq m$ 'dir.
ve $N(A) = \{0\}$

Örnek:
$\dim(N(A)) = n \Rightarrow \dim(R(A)) = 0$
yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $Ax = 0$
dolayısıyla $A = 0$ (sıfır matris)'dir

Örnek: $m = n-1$ ise $m < n$ olduğundan
$n - m = 1 \leq \dim(N(A)) \leq n$
Yani sıfırdan farklı en az bir $x \in \mathbb{R}^n$ mevcuttur öyle ki $Ax = 0$