Cayley-Hamilton Teoremine göre A^k 'nın bulunması

$$\lambda_i^k = c_0[k] + c_1[k]\lambda_i + \dots + c_{n-1}[k]\lambda_i^{n-1} \quad ; \quad i=1,\dots,n$$

eğer çakışık kök yoksa

n bilinmeyenli n adet denklemden

$c_0[k]\,,\ c_1[k]\,,\ \dots,\ c_{n-1}[k]$ çözülür.

$$A^k = c_0[k]\cdot I + c_1[k]A + c_2[k]\cdot A^2 + \dots + c_{n-1}[k]A^{n-1}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 27 \\ -16 & 22 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = 4$$

$$(-2)^k = c_0[k] + c_1[k](-2)$$

$$4^k = c_0[k] + c_1[k]\cdot 4$$

$$6\,c_1[k] = 4^k - (-2)^k$$

$$\boxed{c_1[k] = \frac{1}{6}4^k - \frac{1}{6}(-2)^k}$$

$$c_0[k] = 4^k - 4c_1[k] = \underbrace{4^k - \frac{2}{3}\cdot 4^k}_{\frac{1}{3}\cdot 4^k} + \frac{2}{3}(-2)^k$$

$$\boxed{c_0[k] = \frac{1}{3}4^k + \frac{2}{3}(-2)^k}$$

$$A^k = \left(\frac{1}{3}4^k + \frac{2}{3}(-2)^k\right)\cdot I + \left(\frac{1}{6}4^k - \frac{1}{6}(-2)^k\right)\cdot \begin{bmatrix} -20 & 27 \\ -16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} -3\cdot 4^k + 4\cdot(-2)^k & \frac{9}{2}4^k - \frac{9}{2}\cdot(-2)^k \\ -\frac{8}{3}\cdot 4^k + \frac{8}{3}(-2)^k & 4\cdot 4^k - 3\cdot(-2)^k \end{bmatrix}$$

Çakışık kök durumunda karakteristik polinomun λ'ya göre türevi de o kök için sıfıra eşittir. Bu yüzden λ_i^k: denklemimizin λ'ya göre türevini de kullanabiliriz.

m-katlı λ_i kökü için $(m-1)$. türeve kadar o kök için kullanılabilir. $\rightsquigarrow \dfrac{d}{d\lambda}(\lambda^k) = k\lambda^{k-1}$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -12 & -3 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = 2 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

$$2^k = c_0 + c_1 2 + c_2 \cdot 2^2$$

$$k2^{k-1} = (c_1 + 2c_2\lambda)\Big|_{\lambda=2} = c_1 + c_2 \cdot 4$$

$$(-1)^k = c_0 + c_1(-1) + c_2 \cdot (-1)^2$$

$$c_0 = \frac{5}{9}2^k - \frac{2}{3}k2^{k-1} + \frac{4}{9}\cdot(-1)^k$$

$$c_1 = \frac{4}{9}2^k - \frac{1}{3}k \cdot 2^{k-1} - \frac{4}{9}\cdot(-1)^k$$

$$c_2 = -\frac{1}{9}2^k + \frac{1}{3}k\cdot 2^k + \frac{1}{9}(-1)^k$$

$$A^k = \left(\frac{5}{9}2^k - \frac{2}{3}k\cdot 2^{k-1} + \frac{4}{9}(-1)^k\right)I + \left(\frac{4}{9}2^k - \frac{1}{3}k\cdot 2^{k-1} - \frac{4}{9}(-1)^k\right)A$$
$$+ \left(-\frac{1}{9}2^k + \frac{1}{3}k\cdot 2^{k-1} + \frac{1}{9}(-1)^k\right)A^2$$

$$A^k = \begin{bmatrix} -2^k - 2\cdot k\cdot(-2)^{k-1} + 2\cdot(-1)^k & -\frac{2}{3}\cdot 2^k + \frac{2}{3}\cdot(-1)^k & \frac{8}{9}2^k + \frac{4}{3}k\cdot 2^{k-1} - \frac{8}{9}(-1)^k \\ -2^k + 2\cdot k\cdot(-2)^{k-1} + (-1)^k & \frac{2}{3}\cdot 2^k + \frac{1}{3}\cdot(-1)^k & \frac{4}{9}2^k - \frac{4}{3}k\cdot 2^{k-1} - \frac{4}{9}(-1)^k \\ -3\cdot 2^k - 3\cdot k\cdot(-2)^{k-1} + 3\cdot(-1)^k & -2^k + (-1)^k & \frac{7}{3}2^k + 2k\cdot 2^{k-1} - \frac{4}{3}(-1)^k \end{bmatrix}$$

Karmaşık kökler varsa: (A matrisi reel varsayıyoruz)

$$\lambda_{1,2} = r e^{\mp j\omega} \text{ biçimine getirilir.}$$

Eşlenik çiftin birisi için denklem yazmak yeterli, çünkü diğeri onun eşleniği olacak ve her ikisi de karmaşık kısımlarının reeli reele, sanala sanala eşitlendiğinde aynı denklem çiftini verir.

λ^k yerine $r^k e^{j\omega k} = r^k \cos[\omega k] + j r^k \sin[\omega k]$ yazılır. $c_0, c_1, \ldots$ katsayıları reeldir.

Çünkü $\quad A^k = c_0 I + c_1 A + \ldots + c_{n-1} A^{n-1}$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ -5 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \mp j2 = 2\sqrt{2}\, e^{\mp j135°}$

$$\lambda_1^k = (2\sqrt{2})^k e^{jk \cdot 135°} = (2\sqrt{2})^k \cos[k \cdot 135°] + j(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°]$$

$$= c_0 + c_1 \cdot (-2 + j2)$$

reel=reel $\rightarrow$ $(2\sqrt{2})^k \cos[k \cdot 135°] = c_0 - 2c_1$

sanal=sanal $\rightarrow$ $(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] = 2c_1$

$$c_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] \qquad c_0 = (2\sqrt{2})^k \cos[k \cdot 135°] + (2\sqrt{2})^k \cdot \sin[k \cdot 135°]$$

$$A^k = c_0 I + c_1 \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} (2\sqrt{2})^k \cos[k \cdot 135°] + \frac{11}{2}(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] & \frac{25}{2}(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] \\ -\frac{5}{2}(2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] & (2\sqrt{2})^k \cos[k \cdot 135°] - (11/2) \cdot (2\sqrt{2})^k \sin[k \cdot 135°] \end{bmatrix}$$