SİNÜZOİDAL GERİLİM İLE HARMONİKLİ AKIM İÇİN GÜÇ VE HARMONİK ANALİZİ

Ortalama Güç

Genel olarak gerilimi $v_k(t)$, akımı $i_k(t)$ olan iki uçlu bir eleman üzerinde

$$\text{Anlık güç} = p(t) = v_k(t) i_k(t)$$

$$\text{Ortalama (aktif) güç } P = \frac{1}{T}\int_T v_k(t) i_k(t) dt$$

Eleman sadece direnç (R_y) ise $P = R_y I_{\text{rms}}^2 = \dfrac{V_{\text{rms}}^2}{R_y}$

olur. Burada

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T (i_k(t))^2 dt} \qquad V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T (v_k(t))^2 dt}$$

Eğer $i_k(t) = I_d$ gibi bir sabitse $P = V_{\text{dc}} I_d$

eğer $v_k(t) = V_d$ gibi bir sabitse $P = V_d I_{\text{dc}}$

olur. Burada

$$V_{\text{dc}} = \frac{1}{T}\int_T v_k(t) dt \qquad I_{\text{dc}} = \frac{1}{T}\int_T i_k(t) dt$$

Sinüzoidal Gerilim ile Harmonikli Akım

$$v_k(t) = \hat{V}\sin\omega t = \sqrt{2} V_{\text{rms}} \sin\omega t$$

ile

$$i_k(t) = I_{\text{dc}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2}\cdot I_n^{\text{rms}} \sin(n\omega t - \phi_n) = I_{\text{dc}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}$$

biçimindeki gerilim ve akım için başlıca tanımlar şöyledir:

Görünür güç $\boxed{S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}$

Aktif (ortalama) güç $\boxed{P = V_{\text{rms}} \underbrace{I_1^{\text{rms}} \cos\phi_1}_{b_1/\sqrt{2}}}$ (Ortalama güce katkısı olan sadece akımın temel bileşendir, gerilim sinüzoidal iken)(Bu tanım değil, hesap sonucudur.)

Güç faktörü $\boxed{\text{GF} = \dfrac{P}{S}}$ ($pf = power\ factor$)

Reaktif güç $\boxed{Q = \sqrt{S^2 - P^2}}$

(Reaktif güç, tek frekanslı sistemlerde sin φ ile hesaplanır ve karmaşık gücün sanal kısmıdır; ancak harmonikli akım varsa sin φ diye bir şey yoktur, her harmonik için ayrı ayrıdır. Tek frekanslı çalışan RLC sistemlerinde reaktif güç, şebekeden ihtiyaç fazlası anlık enerji çekilip bobin ve kondansatörlerde depolanması, sonra tekrar şebekeye verilmesi nedeniyle hattı gereksiz yere meşgul ederek dağıtım şirketini rahatsız etmenin bir ölçüsüdür ve kompanzasyon yöntemleriyle sıfırlanabilir. Harmonikli durumda ise hiç enerji depo edilmese bile, yük saf direnç olsa bile reaktif güç vardır. Tek frekanslı durumu da kapsayan genel tanım, çekilen ortalama (aktif) güçten fazla görünür güce sebep olarak dağıtım şirketini rahatsız etmenin bir ölçüsüdür ve kompanzasyon yöntemleriyle sıfırlanamaz. Ancak harmonik eliminasyonuyla yok edilebilir.)

Ana harmonik reaktif gücü $\boxed{Q_1 = V_{\text{rms}} \underbrace{I_1^{\text{rms}} \sin \phi_1}_{-a_1/\sqrt{2}}}$

Buruşma (distorsiyon) reaktif gücü $\boxed{D = \sqrt{Q^2 - Q_1^2}}$

Güç yer değiştirme faktörü (*power displacement factor*) $\boxed{\text{pdf} = \cos \phi_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2} \cdot I_1^{\text{rms}}}}$

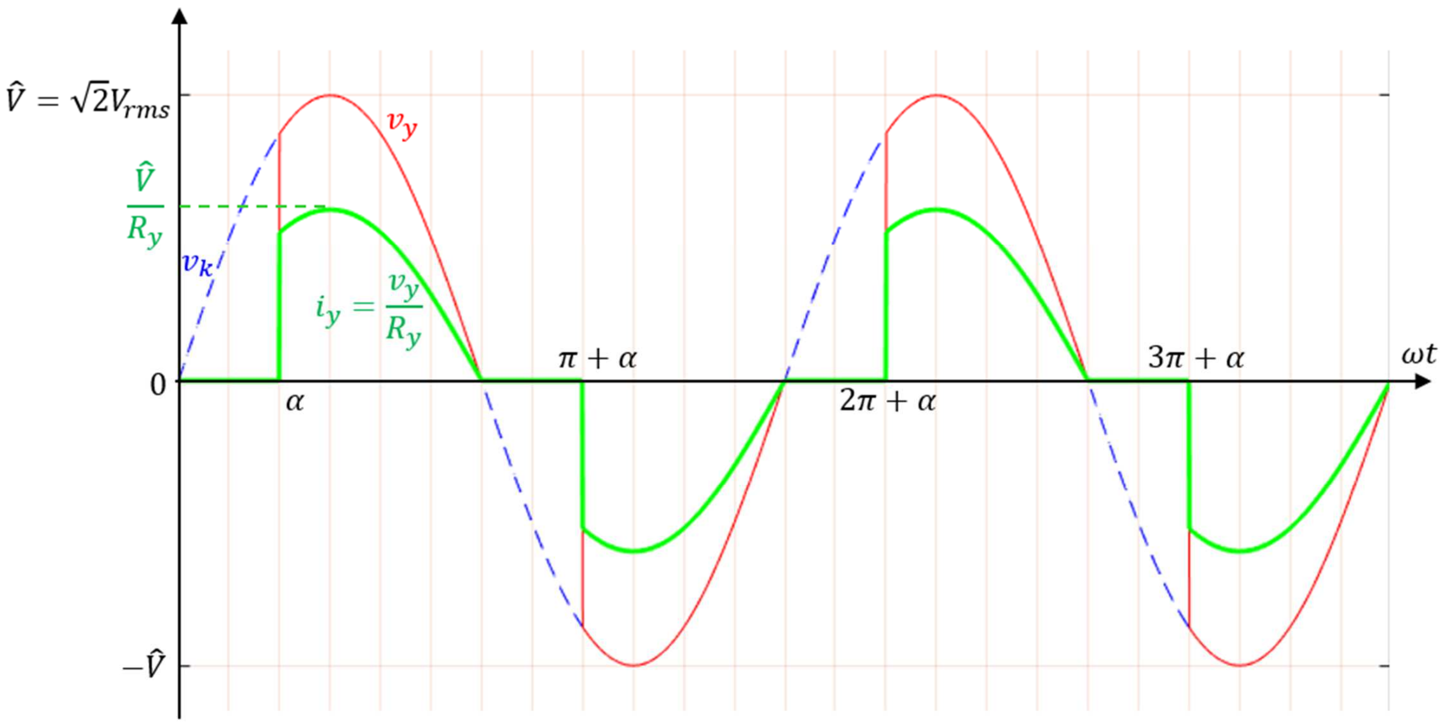
Akımın ana harmonik oranı $\boxed{g_i = \frac{I_1^{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}}}$

Distorsiyon akımı $\boxed{I_{dis} = \sqrt{I_{\text{rms}}^2 - \left(I_1^{\text{rms}}\right)^2}}$

Akımın Toplam Harmonik Distorsiyonu $\boxed{\text{THD}_i = \%100 \times \frac{I_{dis}}{I_1^{\text{rms}}}}$

Örnek

$v_k = \hat{V} \sin \omega t = \sqrt{2} V_{rms} \sin \omega t$ biçimindeki kaynak (şebeke) gerilimi ile şekildeki gibi akım çeken tek fazlı bir AC kıyıcının şebeke üzerinde sebep olduğu güç ve harmonik analizini yapalım. $V_{rms} = 200\ V$, $R_y = 10\Omega$ ve $\alpha = 60°$ için hesaplayalım.



Çözüm:

Aslında şebeke akımı önemlidir ama eşit olduğu için burada $i_k = i_y$ 'dir ve 2π periyotlu olup ilk periyot için tanımı şöyledir:

$$i_k = \begin{cases} \dfrac{\hat{V}}{R_y}\sin\omega t & \alpha < \omega t < \pi \ \text{ ve } \ \pi + \alpha < \omega t < 2\pi \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Önce rms değerini bulalım:

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} i_k^2 d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega t=\alpha}^{\pi}\left(\frac{\hat{V}}{R_y}\right)^2 \sin^2(\omega t)d(\omega t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega t=\pi+\alpha}^{2\pi}\left(\frac{\hat{V}}{R_y}\right)^2 \sin^2(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{\hat{V}^2}{2\pi R_y^2}\left(\int_{\omega t=\alpha}^{\pi}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}d(\omega t) + \int_{\omega t=\alpha+\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}d(\omega t)\right)$$

$$= \frac{\hat{V}^2}{4\pi R_y^2}\left(\left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\omega t=\alpha}^{\pi} + \left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\omega t=\pi+\alpha}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{\hat{V}^2}{4\pi R_y^2}\left(\pi - \alpha - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \underbrace{2\pi - \pi - \alpha}_{\pi-\alpha} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(4\pi)}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\pi + 2\alpha)}_{\sin(2\alpha)}\right)$$

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{\hat{V}^2}{2\pi R_y^2}\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{\text{rms}} = \frac{\hat{V}}{\sqrt{2\pi}R_y}\sqrt{\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)} = \frac{V_{\text{rms}}}{\sqrt{\pi}R_y}\sqrt{\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)}}$$

Değerleri yerine yazarsak: $I_{\text{rms}} = \dfrac{200\text{V}}{\sqrt{\pi}\cdot 10\Omega}\sqrt{\pi - \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{2\pi}{3})} = \underline{17{,}94\text{A} = I_{\text{rms}}}$

Temel bileşeni ise $a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ olarak düşünülürse Fourier serisi 1. harmonik katsayıları:

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{2\pi} i_k\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega t=\alpha}^{\pi}\frac{\hat{V}}{R_y}\underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{\frac{1}{2}\sin(2\omega t)}d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\omega t=\alpha+\pi}^{2\pi}\frac{\hat{V}}{R_y}\underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{\frac{1}{2}\sin(2\omega t)}d(\omega t)$$

$$= \frac{\hat{V}}{4\pi R_y}\left(\left[-\cos(2\omega t)\right]_{\omega t=\alpha}^{\pi} + \left[-\cos(2\omega t)\right]_{\omega t=\pi+\alpha}^{2\pi}\right) = \frac{\hat{V}}{4\pi R_y}\left(\underbrace{-\cos 2\pi}_{-1} + \cos(2\alpha)\underbrace{-\cos 4\pi}_{-1} + \underbrace{\cos(2\pi + 2\alpha)}_{\cos(2\alpha)}\right)$$

$$\boxed{a_1 = \frac{-\hat{V}}{2\pi R_y}\left(1 - \cos(2\alpha)\right) = \frac{-V_{\text{rms}}}{\sqrt{2}\cdot\pi R_y}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)}$$

Değerleri yerine yazarsak: $a_1 = \dfrac{-200V}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 10\Omega}\left(1 - \cos(2\pi/3)\right) = \underline{-6{,}75\text{A} = a_1}$

$$b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{2\pi} i_k \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega t=\alpha}^{\pi} \frac{\hat{V}}{R_y}\underbrace{\sin^2(\omega t)}_{\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}}d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\omega t=\alpha+\pi}^{2\pi} \frac{\hat{V}}{R_y}\underbrace{\sin^2(\omega t)}_{\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}}d(\omega t)$$

$$= \frac{\hat{V}}{2\pi R_y}\left(\left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\omega t=\alpha}^{\pi} + \left[\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_{\omega t=\pi+\alpha}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{\hat{V}}{2\pi R_y}\left(\pi - \alpha - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \underbrace{2\pi - \pi - \alpha}_{\pi-\alpha} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(4\pi)}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\pi + 2\alpha)}_{\sin(2\alpha)}\right)$$

$$\boxed{b_1 = \frac{\hat{V}}{\pi R_y}\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) = \frac{\sqrt{2}V_{\mathrm{rms}}}{\pi R_y}\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)}$$

Değerleri yerine yazarsak: $b_1 = \frac{\sqrt{2}\cdot 200V}{\pi\cdot 10\Omega}\left(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin(2\pi/3)\right) = \underline{22{,}75\mathrm{A} = b_1}$

Temel bileşenin $\sqrt{2}\, I_1^{\mathrm{rms}}\sin(\omega t - \phi_1)$ ifadesini açarak $a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ biçimine getirirsek:

$$\sqrt{2}I_1^{\mathrm{rms}}(-\sin\phi_1)\cos(\omega t) + \sqrt{2}I_1^{\mathrm{rms}}(\cos\phi_1)\sin(\omega t) = a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$$

$$\boxed{a_1 = -\sqrt{2}I_1^{\mathrm{rms}}\sin\phi_1} \qquad \boxed{b_1 = \sqrt{2}I_1^{\mathrm{rms}}\cos\phi_1}$$

$$a_1^2 + b_1^2 = 2\left(I_1^{\mathrm{rms}}\right)^2(\sin^2\phi_1 + \cos^2\phi_1) = 2\left(I_1^{\mathrm{rms}}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_1^{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2}}} \quad \boxed{\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-a_1}{b_1}\right)} \ (a_1 > 0 \text{ ise } \pi \text{ eklenir})$$

Değerleri yerine yazarsak: $I_1^{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{(-6{,}75)^2 + 22{,}75^2}{2}}\,\mathrm{A} = \underline{16{,}78\mathrm{A} = I_1^{\mathrm{rms}}}$ $\qquad \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}75}{22{,}75}\right) = 16{,}5°$

Dikkat: $I_1^{\mathrm{rms}} \leq I_{\mathrm{rms}}$ olmak zorundadır. Aksi bulunması halinde kesinlikle yanlışlık vardır.

Dikkat: Özellikle istenmiyorsa ϕ_1 bulunmadan da aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir. Ancak ϕ_1 bulunacaksa hem $\sin\phi_1$ hem $\cos\phi_1$ şartını sağlayan açı seçilmelidir (yukarıdaki ϕ_1 formülünün yanındaki açıklama bunu sağlamak içindir).

Görünür güç $\boxed{S = V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}} = 200\mathrm{V}\times 17{,}94\mathrm{A} = \underline{3588\mathrm{VA} = S}$

Aktif güç $\boxed{P = V_{rms}\underbrace{I_1^{\mathrm{rms}}\cos\phi_1}_{b_1/\sqrt{2}}} = 200\mathrm{V}\times 22{,}75\mathrm{A}/\sqrt{2} = \underline{3218\mathrm{W} = P}$.

Güç faktörü $\boxed{\mathrm{GF} = \frac{P}{S}} = \frac{3218}{3588} = \underline{0{,}897 = \mathrm{GF}}$

Reaktif güç $\boxed{Q = \sqrt{S^2 - P^2}} = \sqrt{3588^2 - 3218^2}\,\mathrm{VA_r} = \underline{1586\mathrm{VA_r} = Q}$

Ana harmonik reaktif gücü $\boxed{Q_1 = V_{rms}\underbrace{I_1^{\mathrm{rms}}\sin\phi_1}_{-a_1/\sqrt{2}}} = 200\mathrm{V}\times 6{,}75\mathrm{A}/\sqrt{2} = \underline{955\mathrm{VA_r} = Q_1}$

Buruşma (distorsiyon) reaktif gücü $\boxed{D = \sqrt{Q^2 - Q_1^2}} = \sqrt{1586^2 - 955^2}\,\mathrm{VA_r} = \underline{1267\mathrm{VA_r} = Q}$

$$\boxed{\text{pdf} = \cos\phi_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}\cdot I_1^{\text{rms}}}} = \frac{22{,}75}{\sqrt{2}\cdot 16{,}78} = \underline{0{,}959 = \text{pdf}}$$

Akımın ana harmonik oranı $\boxed{g_i = \frac{I_1^{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}}} = \frac{16{,}78}{17{,}94} = \underline{0{,}936 = g_i}$

Distorsiyon akımı $\boxed{I_{dis} = \sqrt{I_{\text{rms}}^2 - \left(I_1^{\text{rms}}\right)^2}} = \sqrt{17{,}94^2 - 16{,}78^2}\,\text{A} = \underline{6{,}33\text{A} = I_{dis}}$

Akımın Toplam Harmonik Distorsiyonu $\boxed{\text{THD}_i = \%100 \times \frac{I_{dis}}{I_1^{\text{rms}}}} = \%100 \times \frac{6{,}33}{16{,}78} = \underline{\%37{,}7 = \text{THD}_i}$