

AC MAKİNELER (Giriş)

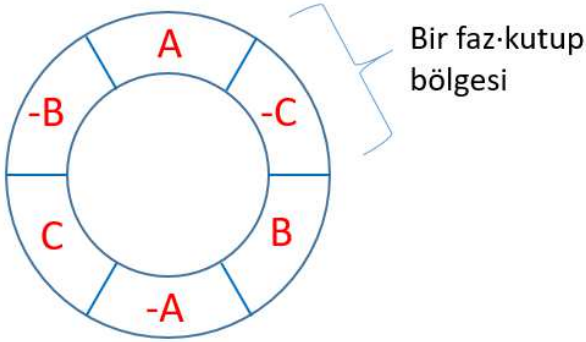
DC Makinelerin kontrolü kolay olmasına karşılık yapıları oldukça karmaşık olup fiyatları ve işletim masrafları (firçalar gibi) yüksektir. AC makinelerin ise yapıları basit, fiyat ve işletim masrafları düşük olmasına karşılık kontrol edilmeleri zordur. Sabit frekansta hızını değiştirmek zordur. Ancak gelişen teknolojiyle birlikte değişken frekanslı sürücüler ucuzladığı için AC makineler gün geçtikçe daha çok tercih edilmektedirler.

Başlıca iki çeşit AC makine vardır:

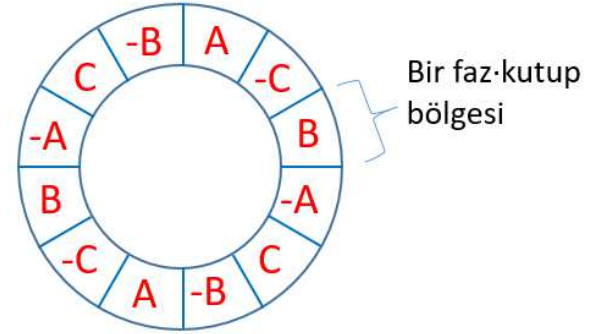
- 1) Senkron (eş zamanlı) makineler
- 2) Asenkron (eş zamanlı olmayan) makineler

Her ikisinin de stator yapıları aynı olup, fark rotorlarındadır. Her iki türün de rotorları sargılı veya sargısız olabilir. Aynı makine istenirse motor, istenirse jeneratör modunda kullanılabilir. AC jeneratörlere "alternatör" de denir. Genellikle küçük güçlerde tek fazlı, büyük güçlerde üç fazlı AC makineler kullanılır. Alternatör güçleri görünür güç (VA, kVA, MVA vb) cinsinden belirtilir.

AC makinelerin stator ve rotorları, girdap akımları kayıplarını azaltmak için birer yüzleri SiO_2 ile boyanarak yalıtılmış ince sac paketlerinden birer paket halindedir. Stator manyetik çekirdeği içindeki oluklarda sargılar bulunur. AC makinelerde "armatür" denilince stator anlaşılır. Çünkü bu kelime, esas gerilimin endüklendiği sargıları taşıyan kısımdır. DC makinelerde endüklene rotorunda olurken, AC makinelerde esas olarak statorunda olur. Örnek olarak 3 fazlı 2 ve 4 kutuplu AC makine stator bölgeleri sırasıyla şöyledir:



3 fazlı 2 kutuplu (6 faz-kutup bölgesi)
AC makine statoru

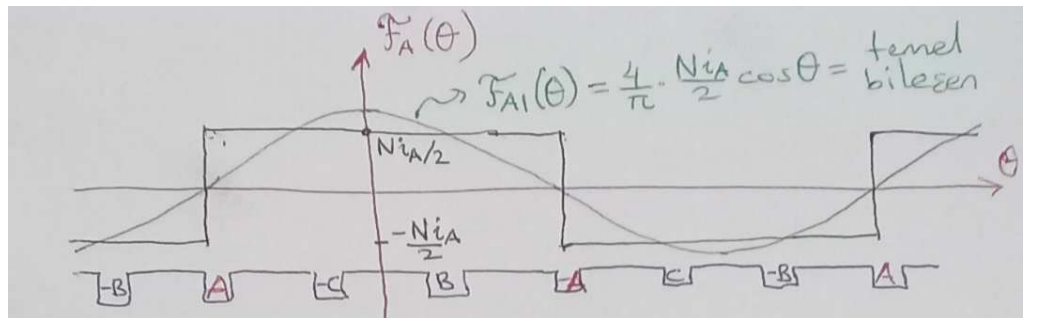
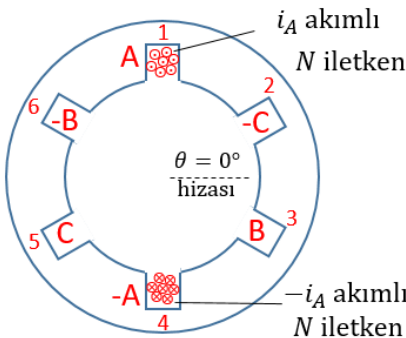


3 fazlı 4 kutuplu (12 faz-kutup bölgesi)
AC makine statoru

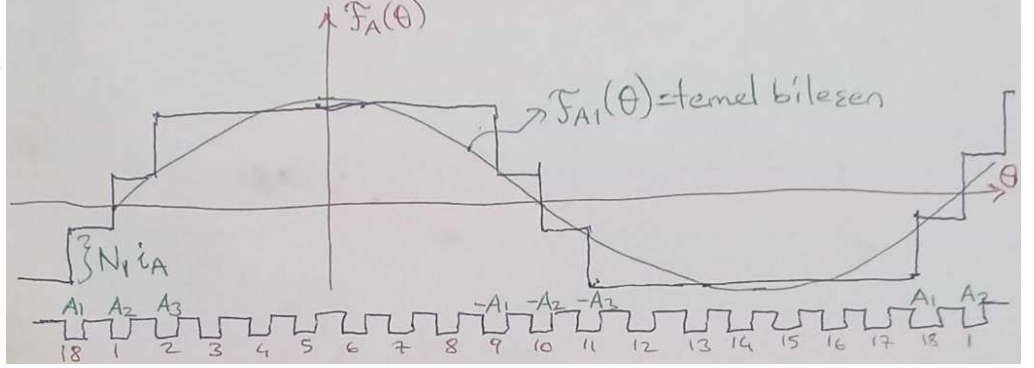
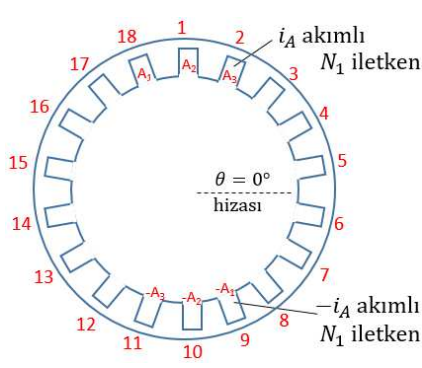
Toplu ya da Dağıtılmış Sargılar

Bir faz-kutup bölgesindeki bütün iletkenler bir oluğa yerleştirilmişse makine toplu sargılı, birden fazla oluğa dağıtılmışsa dağıtılmış sargılıdır. Silindirik rotorlu, stator ve rotor manyetik çekirdeğinde $\mu \approx \infty$ olan, 3 fazlı, 2 kutuplu bir ac makinede, statorun yalnız A fazının ürettiği mmk dalga şekli üzerinden toplu ve dağıtılmış sargıların avantaj ve dezavantajlarına bakalım.

Toplu sargılı makine:



Dağıtılmış sargılı makine:



Periyodik bir sinyal, sinüzoidal dalgaya ne kadar çok benziyorsa Fourier serisinde harmonik (tek başına bu kelimeyle temel bileşen hariç harmonikler anlaşılmalıdır) oranı o kadar azdır. Dağıtılmış sargılı durumdaki mmk dalga şekli, sinüzoidal şekle toplu sargılıdakinden daha çok benzemektedir. Buna göre:

Toplu sargıların başlıca dezavantajı, dağıtılmış sargılardan daha yüksek oranda harmonik üretmesidir. Harmonikler temel bileşenden yüksek frekanslı olduğundan, frekansın karesiyle orantılı girdap akımları kaybı da daha çok olur. Ayrıca Ri^2 kayıpları statorun dar birer bölgelerinde yoğunlaştığı için bu bölgelerde bozulma ihtimali daha yüksektir.

Dağıtılmış sargıların toplu sargılara göre dezavantajı, aynı faz-kutup bölgesinde farklı oluklardaki iletkenlerin ürettiği mmk dalgaları arasında faz farkı olması nedeniyle bunların temel bileşenlerinin skaler değil, vektörel toplanmasıdır. Toplu sargılarda ise hepsi aynı fazda olduğundan skaler toplanırlar, ve aynı sayıda iletken için daha büyük toplam elde edilir. Ancak yine de dağıtılmış sargılarda stator çevresi daha ekonomik ve dengeli kullanılır, ve daha çok iletken konulabildiği için (iki örnekte muhtemelen $3N_1 > N$) aynı boyutlarda makinede aynı akımla daha büyük mmk temel bileşeni elde edilebilir.

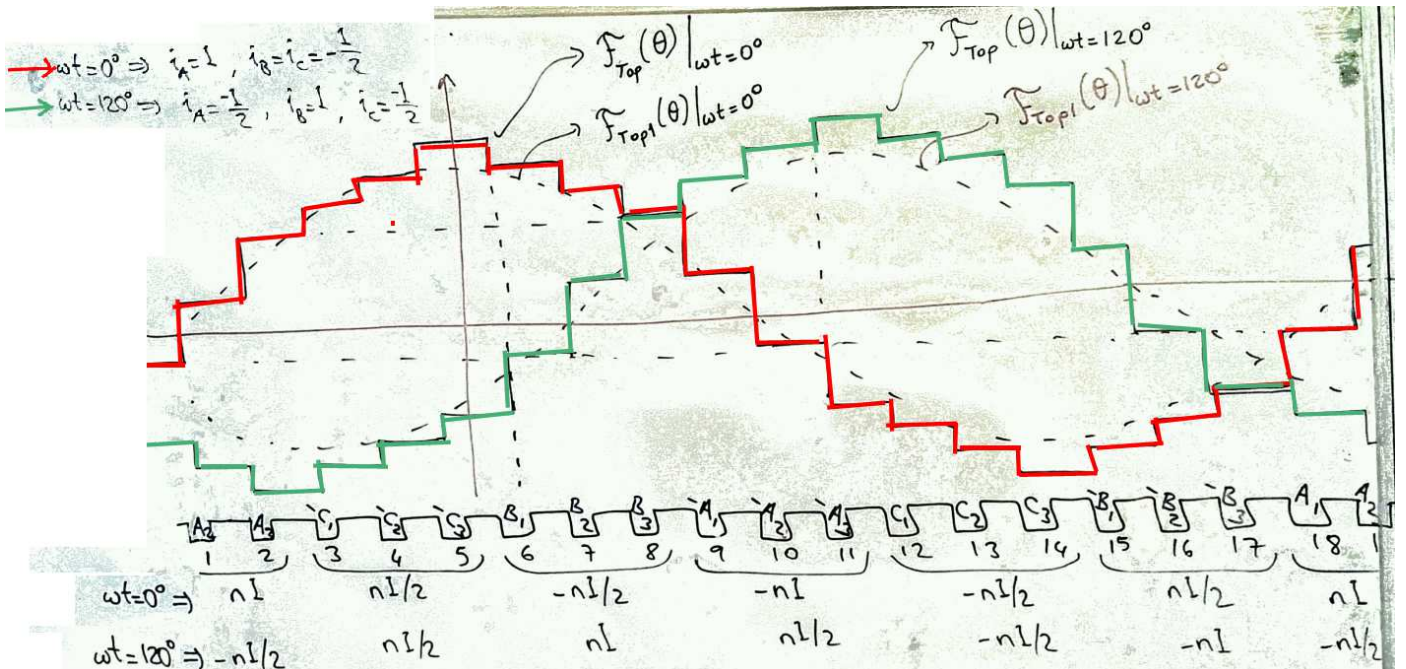
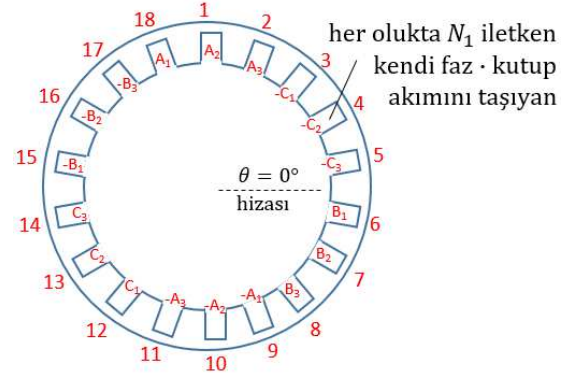
Bileşke MMK ve Döner Manyetik Alan

Silindirik rotorlu, stator ve rotor manyetik çekirdeğinde $\mu \approx \infty$ olan, 3 fazlı, 2 kutuplu, her faz-kutup bölgesinde $q = 3$ oluk bulunan bir ac makinede, bileşke mmk dağılımını çizelim. Ancak akımlar

$$i_A(t) = I \cos \omega t, \quad i_B(t) = I \cos(\omega t - 120^\circ), \\ i_C(t) = I \cos(\omega t - 240^\circ)$$

değişken olduğu için şekil de değişken olacaktır. Bu yüzden kağıda

çizerken zamanın ancak özel değerleri için ayrı ayrı çizimler yapabiliriz. $\omega t = 0^\circ$ ve $\omega t = 120^\circ$ için çizelim:



Görüldüğü gibi ωt 'nin 120° lik değişiminde, 2 kutuplu makinenin bileşke mmk dalgası da stator içinde 120° ilerlemiştir. Buradan tahmin edebiliriz ki $\omega t = 240^\circ$ için çizim yapsak, bir 120° daha ilerlemişini elde ederiz. Yani mmk dalgası zamanla stator içinde saat yönünde ilerlemektedir.

Mmk temel bileşenini, stator içinde maksimum mmk olan hizaya yönelmiş bir fazörle gösterirsek, bu fazör de yanda gösterildiği gibi ω açısal hızıyla döner (2 kutuplu makine için).

Aslında bileşke mmk dalgası sadece 60° nin katları kadar ωt değişimlerinde aynı şeklin o kadar ilerlemişini olur. Ancak, mesela 30° kadarlık değişimde akımlarda $\sqrt{3}$ çarpanı ortaya çıkmasından

anlaşılabileceği gibi, tam olarak aynı şeklin ötelenmiş değil, buna yakın bir şekil olur. Fakat mmk temel bileşeni tam olarak aynı şeklin düzgün ötelenenidir. Bu şöyle gösterilebilir:

Toplamın temel bileşeni $\mathcal{F}_{\text{Top1}}(\theta, t)$, tek tek faz mmk temel bileşenlerinin toplamıdır.

$$\mathcal{F}_{\text{Top1}}(\theta, t) = \mathcal{F}_{A_1}(\theta, t) + \mathcal{F}_{B_1}(\theta, t) + \mathcal{F}_{C_1}(\theta, t)$$

Her bir fazın mmk temel bileşeninin zaman bağımlılığı, kendi faz akımının anlık değeriyle orantılıdır. Uzay (θ) bağımlılığı ise o fazın manyetik eksenini hizasında maksimum değerini alan bir sinüzoidal fonksiyonla orantılıdır. Simetriden dolayı her üç fazın da genliği aynıdır ve buna $\hat{\mathcal{F}}_1$ diyelim.

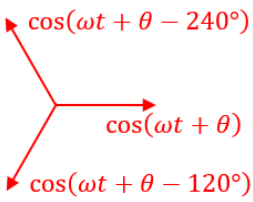
$$\mathcal{F}_{A_1}(\theta, t) = \hat{\mathcal{F}}_1 \cos \omega t \cos \theta$$

$$\mathcal{F}_{B_1}(\theta, t) = \hat{\mathcal{F}}_1 \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\theta - 120^\circ)$$

$$\mathcal{F}_{C_1}(\theta, t) = \hat{\mathcal{F}}_1 \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\theta - 240^\circ)$$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ formülünü sırasıyla zaman ve uzay bağımlılıkları olan cos terimlerini her bileşen için ayrı ayrı yerine yazıp toplarsak:

$$\mathcal{F}_{\text{Top1}}(\theta, t) = \frac{\hat{\mathcal{F}}_1}{2} \left[\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta - 240^\circ) + \cos\left(\omega t + \theta - \underbrace{480^\circ}_{120^\circ}\right) \right]$$



$$+ \frac{\hat{\mathcal{F}}_1}{2} \cos(\omega t - \theta) + \frac{\hat{\mathcal{F}}_1}{2} \cos(\omega t - \theta) + \frac{\hat{\mathcal{F}}_1}{2} \cos(\omega t - \theta)$$

Kırmızı gösterilen üç terim, $(\omega t + \theta)$ 'ya göre dengeli üç fazlı fazörle temsil edilebileceğinden, bunların toplamının sıfır olduğu kolayca anlaşılabilir. Sonuçta:

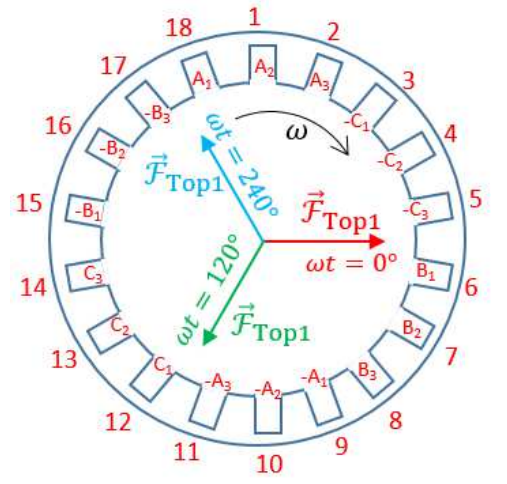
$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{Top1}}(\theta, t) = \frac{3}{2} \hat{\mathcal{F}}_1 \cos(\omega t - \theta)}$$

bulunur. Stator içinde mmk temel bileşen fazının sabit olduğu bir noktanın (mesela maksimumun) θ koordinatının t zaman değişkenine göre nasıl değiştiğini bakalım:

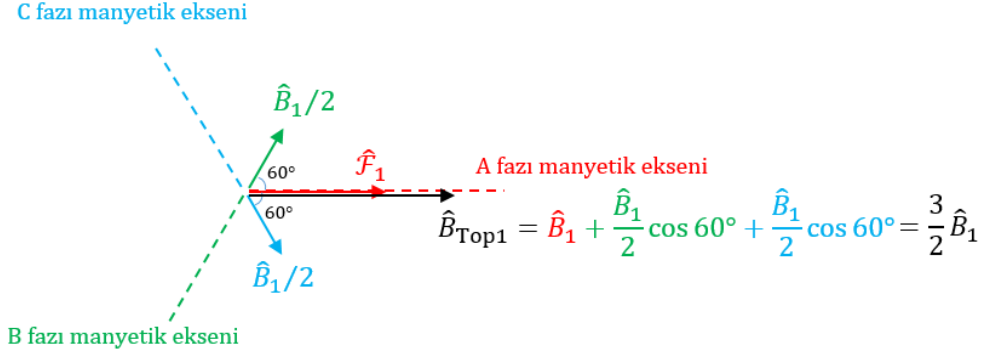
$$\theta - \omega t = \text{sabit}$$

$$\text{Her iki tarafın } t \text{ 'yegöre türevini alalım: } \frac{d\theta}{dt} - \omega = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega}$$

Yani mmk temel bileşeni (ve dolayısıyla bunun fazör gösterimi) stator içinde her an ω açısal hızıyla dönmektedir (θ artış yönü saat yönü seçildiğinden saat yönünde).



Bileşke manyetik akı yoğunluğu genliğinin, tek faz tarafından üretilen manyetik akı yoğunluğu genliğinin (\hat{B}_1 diyelim) 3/2 katı olduğu şöyle de gösterilebilir: Her fazın ürettiği manyetik akı yoğunluğu vektörü, kendi manyetik ekseninde o anki akımı maksimum akımının kaç katıysa, tek faz genliğinin o kadar katıdır. Mesela $\omega t = 0^\circ$ olan anda A fazı maksimum değerinde, B ve C fazları ise maksimumun -1/2 katı, yani ters yönde 1/2 katı manyetik akı yoğunluğu vektörü üretir. Bunların bileşkesi aşağıdaki gibi $3\hat{B}_1/2$ bulunur:



3 fazlı 2 kutuplu bir makinede döner manyetik alan bu şekilde elde edilir. Statorun ortasına bir pusula ibresi yerleştirilirse, o da döner manyetik alanla aynı yönde ve aynı hızla (*senkron* = eş zamanlı) fakat biraz açı farkıyla döner. Bu ilkeden yararlanılarak senkron motorlar yapılmıştır. Senkron motorlarda kalıcı mıknatıslı ya da elektromıknatıslı (dc akımla uyarılmış sargılı) rotor, döner manyetik alanla birlikte döner. Çünkü sargının manyetik dipol moment vektörü (\vec{m}), ortamın manyetik akı yoğunluğu vektörü (\vec{B}) ile hizalanmaya çalışır. Aralarında yüklenmeye artan bir açı farkı vardır. Çünkü sargılı ya da mıknatıslı rotor üzerindeki tork vektörü

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

olup aradaki açının sinüsüyle doğru orantılıdır.

$$\vec{B} \propto \vec{F}_s \text{ (stator bileşke mmk fazörü)}$$

$$\vec{m} \propto \vec{F}_r \text{ (rotor bileşke mmk fazörü)}$$

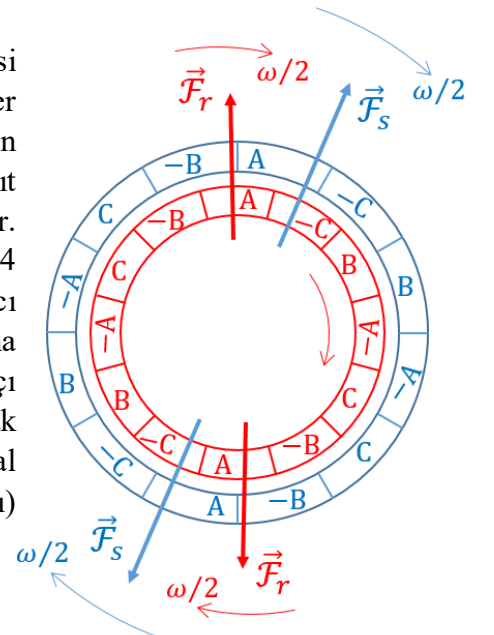
olduğundan ve torkun doğrultusu hep aynı olduğundan skaler olarak

$$\text{Tork} = T \propto \vec{F}_s \times \vec{F}_r \propto F_s F_r \sin \alpha$$

orantısı yazılabilir. Burada α açısı (\propto değil!), \vec{F}_s fazörünün \vec{F}_r fazöründen ne kadar ileride olduğunu gösteren açıdır. Üretilen tork yükü dengeleyene kadar α açısı artar veya azalır. Dolayısıyla $\alpha < 0$ durumu da jeneratör olacaktır. $|\alpha| \leq 90^\circ$ için denge mümkündür. Bununla da denge sağlanmıyorsa makine senkron modda çalışmaz.

Çok Kutuplu AC Makineler ve Senkron Hız

AC makinelerde stator ve rotor kutup sayıları eşit olmak zorundadır. Aksi halde düzgün ve faydalı bir tork elde edilemez. Her kutup çifti için birer mmk fazörü olur. Her bir fazör, stator akımının bir yarı periyodunda (ωt 'nin 180° değişiminde), bir faz-kutup bölgesinden, aynı fazın bir sonraki (zıt işaretli) faz-kutup bölgesine kadar (yandaki 4 kutuplu örnek için 90°) ilerler. Manyetik alan vektörlerinin veya mmk fazörlerinin açısal hızı da yandaki 4 kutuplu örnek için $\omega/2$ olur. Burada 2 farklı açı ve açısal hız tanımı ihtiyacı doğar. Aynı fazın komşu iki (zıt işaretli) faz-kutup bölgesi arasında daima 180° kabul eden açıya ve buna göre açısal hıza sırasıyla “elektiriksel açı (θ_{elk})” ve “elektiriksel açısal hız (ω_{elk})” denir. Bunların uzaysal olarak görülen değerlerine de sırasıyla “mekanik açı (θ_{mek})” ve “mekanik açısal hız (ω_{mek})” denir. Kutup sayısı P olan bir makinede (P çift sayı) aralarındaki ilişki şöyledir:



Dikkat: Şekildeki rotor, asenkron makine rotorudur.

$$\theta_{elk} = \frac{P}{2} \theta_{mek} \quad , \quad \omega_{elk} = \frac{P}{2} \omega_{mek}$$

Döner manyetik alan vektörlerinin veya mmk fazörlerinin dönüş hızına “senkron hız” denir. Açısal (rad/s) cinsten senkron hız, elektriksel olarak daima stator akımının açısal frekansı ω 'dır. Fakat

$$\text{mekanik açısal senkron hız: } \omega_s = \frac{2}{P} \omega$$

Senkron hız daha çok mekanik devir/dakika = rpm cinsinden kullanılır. Hz olarak stator frekansı $f = \omega/(2\pi)$ cinsinden

$$\text{mekanik rpm senkron hız: } n_s = \frac{120f}{P}$$

Elektriksel devir/dakika ise “erpm” ile gösterilir ve rpm'in $P/2$ katıdır (erpm cinsinden senkron hız = $60f$).

$f = 50$ Hz için mümkün olan senkron hızlar ($6000/P$) rpm aşağıdaki tablodaki gibidir:

P	2	4	6	8	10	12	...
n_s (devir/dk)	3000	1500	1000	750	600	500	...

Senkron motorlar tam olarak, asenkron motorlar ise yaklaşık olarak senkron hızda dönerler. AC motorların sabit frekansta hız kontrolünün zor olmasının başlıca nedeni budur.

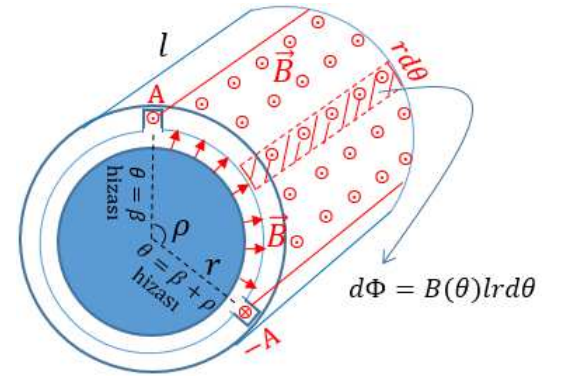
Kutup Uzanımı ve Sargı Uzanımı

Komşu iki kutup arasındaki açıklığa “kutup uzanımı” denir. Bir sargının iki kenarının yerleştiği oluklar arasındaki açıklığa da “sargı uzanımı” denir. Her ikisi de oluk sayısı, mekanik ya da elektriksel açı, derece ya da radyan cinsinden verilebilir. Elektriksel açı cinsinden sargı uzanımını ρ sembolüyle göstereceğiz.

Kutup uzanımı elektriksel olarak daima 180° 'dir. Sargı uzanımı ise bundan eksik, fazla ya da buna eşit olabilir. Buna göre sargılar sırasıyla; “eksik uzanlı”, “eksik uzanlı” ya da “tam uzanlı” diye adlandırılır. (Sargılar eksik veya fazla uzanlıyken kutup uzanımının 180° yapılabilmesindeki geometrik zorluk, ileride göreceğimiz çok katlı sargılarla aşılır.)

Sargı uzanımı, sarım veya sargının akı genliğini etkiler. Bu da endüklenen gerilimi etkiler. Manyetik akı yoğunluğu dalgası $B(\theta, t)$ yürüyen (dönen) bir dalgadır. Temel bileşen akısı maksimum değerini ($\hat{\Phi}_1$), manyetik akı yoğunluğu temel bileşeninin ($B_1(\theta, t)$) tepe değeri sargının iki kenarının tam ortasından geçerken alır. Zira anlık akı,

$$\Phi_1(t) = \int_{\theta=\beta}^{\beta+\rho} B_1(\theta, t) l r d\theta$$

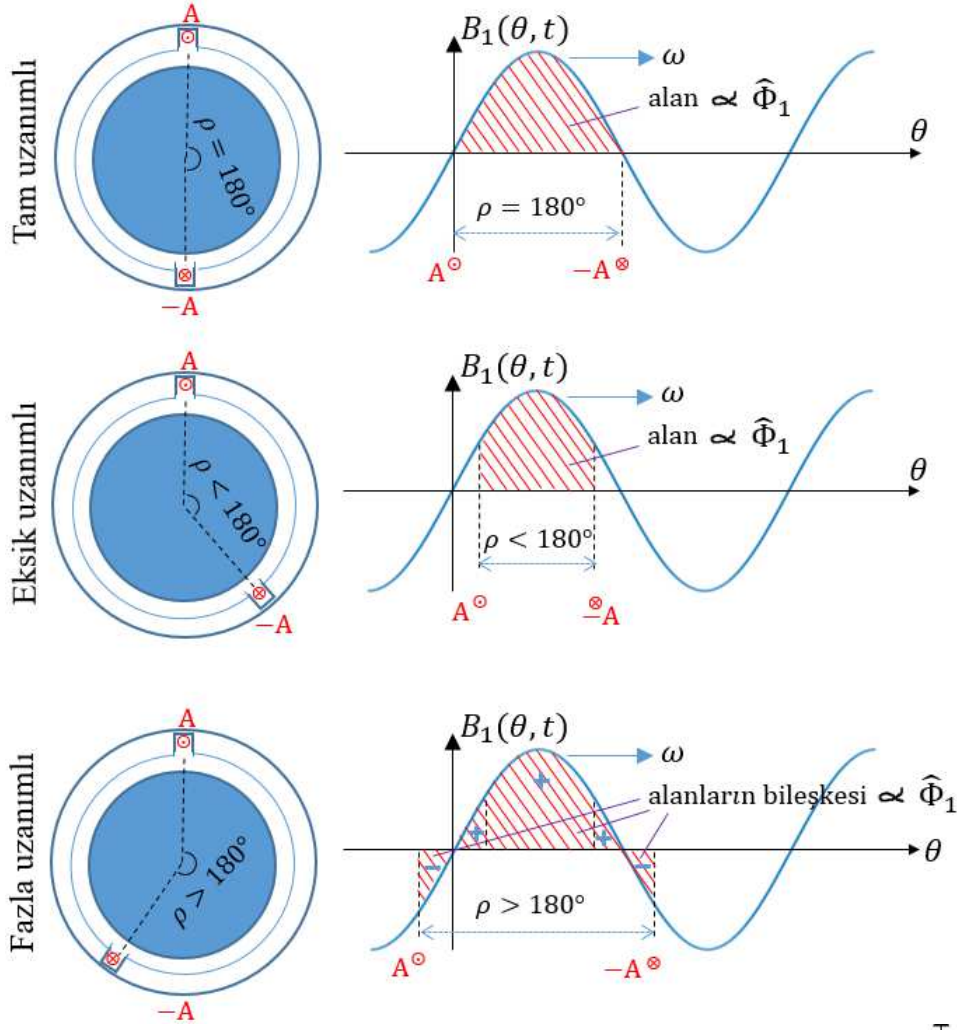


integraliyle bulunur. Burada l ve r silindirik makinenin sırasıyla derinliği ve sargı konumu için yarıçapıdır. Görsel kolaylık için 2 kutupluya göre çizilmiştir. Çok kutuplu durumda ise buradaki θ elektrikseldir.

Tam, eksik ve fazla uzanlı durumlarda akı genliğinin karşılaştırılması, bir sonraki şekil grubunda verilmiştir. Görülebileceği gibi fazla uzanlı sargılarda da eksik uzanlı gibi akıdan eksik miktarda faydalanılmaktadır. Zaten 2 kutupluda fazla uzanlı sargıya silindirin diğer tarafından bakılırsa eksik uzanlı gibi görülecektir.

Eksik ya da fazla uzanlı sargılar, harmonik yok etme amaçlı kullanılır. Elektrik makinelerindeki simetriden dolayı elektriksel büyüklükler genellikle tek harmonik simetrisine sahiptir. Yani çift harmonikler bulunmaz. 3'ün katı numaralı harmonikler ise daha kolay başka bir yolla yok edilebilir. Dolayısıyla başka numaralı (ve katları)

harmonikleri yok etmek için eksik ya da fazla uzanımlı sargılar tercih edilebilir. Ancak kolaylık için 3'ün katı numaralı harmonikler üzerinde bu konuyu gösterelim. İki sonraki şekil grubunda eksik ya da fazla uzanımla bu işin nasıl yapılabildiği gösterilmiştir.



Sağdaki şekilde 3. harmoniği sargı uzanımıyla yok etmek gösterilmiştir. Eğer mesela 5. harmoniği yok etmek isteseydik 180° 'nin $1/5$ katını 180° 'den çıkartarak eksik uzanımın, ekleyerek de fazla uzanımın ne olması gerektiğini bulabilirdik: 144° ya da 216°

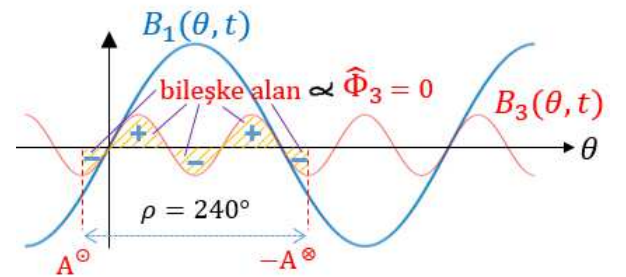
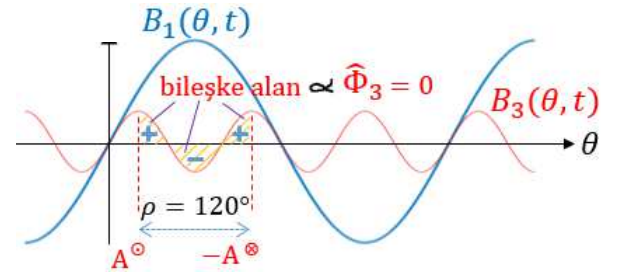
Sargı uzanımının, sargıda endüklenen rms gerilime etkisi, "sargı uzanım katsayısı" ($0 \leq k_u \leq 1$) denilen bir katsayıyla hesaba katılır. Bu, o uzanım için sargıda endüklenen rms gerilimin, sargı tam uzanımlı varsayıldığında endüklenecek gerilime oranıdır. Temel bileşen için

$$k_u = \sin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

olsa da aslında her (n .) harmonik için (k_{un}) ayrı ayrı hesaplanır. Formülü, çıkartılışıyla görelim:

1 sarımdaki akının n . harmoniği:

$$\Phi_n(t) = \int_{\theta=\beta}^{\beta+\rho} B_n(\theta, t) l r d\theta$$



β yerine ileride gerilimi maksimum yapacak değeri atayacağız. $B_n(\theta, t)$ için uzaysal faz bu yüzden önemsizdir. Zamansal bağımlılık

$$B_n(\theta, t) = \hat{B}_n \sin(n\theta - \omega t)$$

$$\Phi_n(t) = \int_{\theta=\beta}^{\beta+\rho} \hat{B}_n \sin(n\theta - \omega t) l r d\theta$$

$$\Phi_n(t) = -\frac{\hat{B}_n l r}{n} \cos(n\theta - \omega t) \Big|_{\theta=\beta}^{\beta+\rho} = \frac{\hat{B}_n l r}{n} [\cos(n\beta - \omega t) - \cos(n\beta + n\rho - \omega t)]$$

Tek bir sarımda endüklenen gerilim:

$$e_n(t) = \frac{d\Phi_n(t)}{dt} = \frac{\hat{B}_n \omega l r}{n} \left[\sin \left(\underbrace{n\beta - \omega t}_x \right) - \sin \left(\underbrace{n\beta + n\rho - \omega t}_y \right) \right]$$

$\sin x - \sin y = 2 \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right)$ formülü ile:

$$e_n(t) = -2 \frac{\hat{B}_n \omega l r}{n} \sin \left(\frac{n\rho}{2} \right) \cos \left(n\beta - \omega t + \frac{n\rho}{2} \right)$$

Sargı uzanımının tam olmasıyla farklı olması arasındaki rms oranına (veya genlik oranı, aynı) bakacağımız için, buradaki cos teriminin maksimum (1) değerlerinde orantı kuracağız. Dolayısıyla sargı uzanımının ρ olduğu durumda endüklenen rms gerilimin, sargı uzanımının 180° olduğu durumda endüklenen rms gerilime oranı:

$$k_{un} = \left| \sin \left(\frac{n\rho}{2} \right) \right| = n. \text{ harmonik sargı uzanım katsayısı}$$

bulunur ($0 \leq k_{un} \leq 1$). Sargı uzanım katsayısı tek bir iletken (bir sarımın bir kenarı) gerilimi hesabında dikkate alınmaz. Bir iletkende endüklenen gerilimin n . harmonik rms değeri, $E_{rms} = \sqrt{2} \pi N f \hat{\Phi}$ formülünde sarım sayısı (N) yerine $1/2$, frekans (f) ve akı genliği ($\hat{\Phi}$) yerine sırasıyla n . harmonik frekansı ($n f$) ve tam uzanımlı varsayımına göre akı genliği ($\hat{\Phi}_n$) yazılarak bulunur:

$$E_{rms}/iletken = \frac{\pi}{\sqrt{2}} n f \hat{\Phi}_n$$

Eğer bir sarımda endüklenen n . harmonik rms gerilimi bulmak istersek, bunu 2 ile ve k_{un} ile çarpmalıyız. Veya doğrudan N sarımlı bir sargıda endüklenen n . harmonik rms gerilim:

$$E_{rms}/sargı = (E_{rms}/iletken) \cdot 2N k_{un}$$

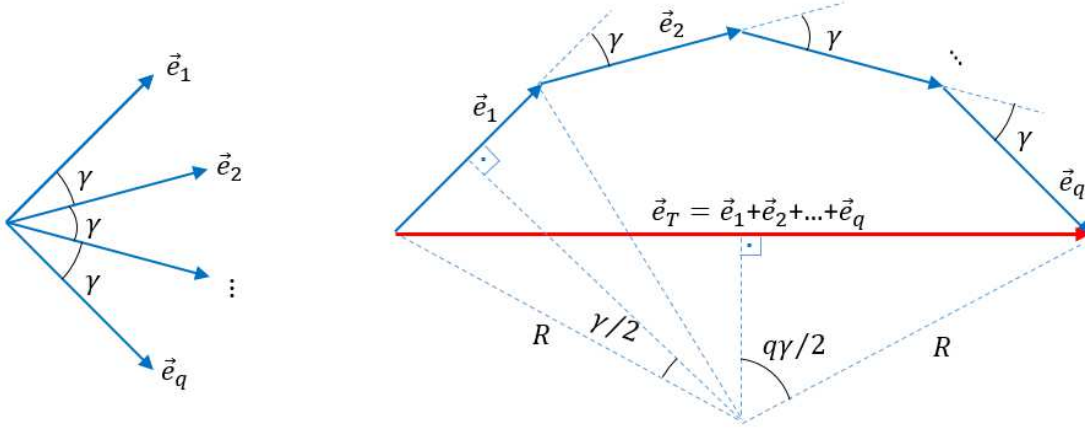
Dağılım Katsayısı

Sargılar oluklara çok katlı da yerleştirilmiş olsa, bir kat için bir faz-kutup bölgesindeki oluk sayısı (q) birden fazlaysa, komşu oluklardaki sargıların gerilimleri arasında, elektriksel oluk açısı (γ) kadar faz farkı olur. Faz gerilimini bulmak için bunları vektörel toplamak gerekir. Bu işlemi kolaylaştırmak için, vektörel toplam büyüklüğünün skaler toplam büyüklüğüne oranı, “dağılım katsayısı” ($0 \leq k_d \leq 1$) adıyla tanımlanır. Böylece skaler toplam, yani bir fazdaki sargı sayısı ile bir sargı gerilimi çarpımı, k_d ile de çarpılarak faz gerilimi bulunur. Her harmonik için ayrı ayrı hesaplanmalıdır:

$$E_{rms}/faz = (E_{rms}/sargı) \cdot N_{faz} k_{dn}$$

Burada N_{faz} her fazdaki sargı sayısıdır.

$$N_{faz} = \frac{1 \text{ sargı}}{2 \text{ oluk}} \times \frac{\text{Makine oluk sayısı}}{\text{faz sayısı}} \times \text{Oluktaki kat sayısı}$$



$$k_d = \frac{|\vec{e}_T|}{|\vec{e}_1| + |\vec{e}_2| + \dots + |\vec{e}_q|}$$

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = \dots = |\vec{e}_q| \quad \rightarrow \quad k_d = \frac{|\vec{e}_T|}{q|\vec{e}_1|}$$

$$|\vec{e}_1| = 2R \sin(\gamma/2) \quad \text{ve} \quad |\vec{e}_T| = 2R \sin(q\gamma/2)$$

$$k_d = \frac{2R \sin(q\gamma/2)}{q \cdot 2R \sin(\gamma/2)}$$

Burada R 'nin fiziksel bir anlamı olup olmamasının önemi yoktur. R bir katalizör gibi denkleme girip görevini tamamlayıp çıkan bir yarıçaptır. Böylece temel bileşen için dağılım katsayısı bulunur:

$$k_d = \frac{\sin(q\gamma/2)}{q \sin(\gamma/2)}$$

n . harmonik için komşu oluklarda endüklenen gerilimler arasındaki faz farkı γ değil, $n\gamma$ olur. Bu yüzden :

$$k_{dn} = \left| \frac{\sin(qn\gamma/2)}{q \sin(n\gamma/2)} \right| = n. \text{ harmonik dağılım katsayısı}$$