

ELEKTROMİKNATISLAR, MANYETİK KUVVET VE ENERJİ

Mıknatısın ferromanyetik malzemeleri neden çektiği konusu aslında burada anlatılandan çok daha karışıktır. Burada enerjinin korunumu üzerinden bir çıkarım yapılacaktır, her ne kadar aslında enerjinin korunumu ile yapılan çıkarımların, neden ve nasıl sorularına açıklayıcı cevap verdikleri pek söylenemese de.

Şekildeki gibi hareket edebilen bir manyetik devre düzeneği düşünelim. Üstteki sargılı parça sabit, alttaki parça ise düşey doğrultuda hareket edebilen olsun. Hem hareketli parça, hem de üstteki sargının nüvesi ferromanyetik malzemeden olsun. R sargı iç direnci olmak üzere sargı ve ona bağlı kaynağın zamana (t) göre çevre denklemi:

$$v = Ri + e_{zit} = Ri + \frac{d\Psi}{dt}$$

Burada Ψ , sargının zincirlenen toplam manyetik akısı, i akımı, v kaynak gerilimi, e_{zit} ise endüklenen zıt emk'sıdır. Kaynağın sonsuz küçük dt süresince verdiği enerji

$$vidt = \underbrace{Ri^2 dt}_{\text{sargıda ısıya dönüşen}} + \underbrace{id\Psi}_{\text{manyetik düzeneğe aktarılan}}$$

Manyetik düzeneğe aktarılan enerji ise daha önce incelediğimiz hareketsiz manyetik devrelerden farklı olarak bu defa mekanik enerjiyi, yani işi de içerir:

$$id\Psi = dW_{man}(\Psi, x) + dW_{mek} = dW_{man}(\Psi, x) + Fdx$$

F kuvvetinin x 'in artış yönünde tanımlandığına dikkat edersek, sonsuz küçük yer değiştirme dx ile vektör hallerinin skaler çarpımının, doğrudan skaler hallerinin çarpımı şeklinde yazılabildiğini görürüz. Manyetik alanda depolanan enerji W_{man} , burada hem Ψ hem de x 'in fonksiyonudur.

Şimdi, diferansiyel denklemler bilgilerimizden, iki değişkenli bir fonksiyonun tam diferansiyelini hatırlayalım:

$$dW_{man}(\Psi, x) = \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial x} dx$$

Bu denklemi bir önceki denklemde kullanırsak şunu buluruz:

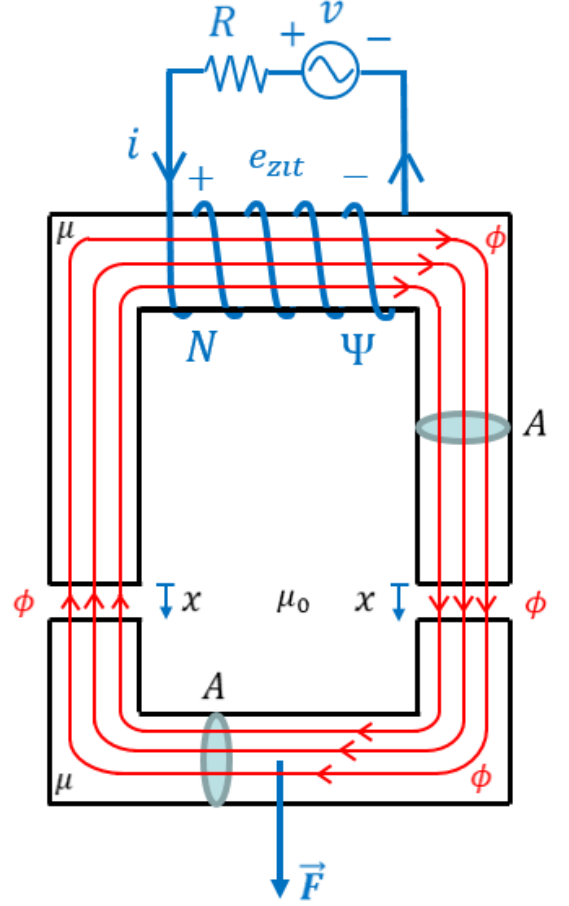
$$dW_{man}(\Psi, x) = id\Psi - Fdx = \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial x} dx$$

Bu, $d\Psi$ ve dx 'in her oranı için geçerli olduğundan, karşılıklı terimleri eşitleyebiliriz. Buna göre:

$$i = \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial \Psi} \quad , \quad \boxed{F = - \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial x}}$$

Kuvvet formülündeki eksi işaretine dikkat ediniz. Bu kısmi türevler, bağımsız değişkenler Ψ ve x cinsinden ifade edildikten sonra alınmalıdır. x 'e de bağlı başka bir değişken varken x 'e göre veya Ψ 'ye de bağlı başka bir değişken varken Ψ 'ye göre kısmi türev almak yanıltıcı olabilir.

Örneğin, μ değeri sabit nüveli bir sargıda x 'e bağlı endüktans cinsinden zincirlenen toplam akı ilişkisi $\Psi = L(x)i$, yani $i = \Psi/L(x)$ kullanılarak manyetik alanda depolanan enerji ile



$$W_{man}(\Psi, x) = \frac{1}{2}L(x)i^2 = \frac{\Psi^2}{2L(x)} \rightarrow \frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial \Psi} = \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{\Psi^2}{2L(x)} \right) = \frac{2\Psi}{2L(x)} = i \quad \checkmark$$

akım formülü doğrulanmış olur. Ancak bizim asıl kullanmak istediğimiz manyetik kuvveti bulmak idi. Böyle tek sargılı bir manyetik devre için kuvvet formülü şöyle basitleştirilebilir:

$$F = -\frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Psi^2}{2L(x)} \right) = -\frac{\Psi^2}{2}(-1)[L(x)]^{-2} \frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi}{L(x)} \right)^2 \frac{dL(x)}{dx}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dx}}$$

Bu formül, μ sabit olan çoğu durumda daha kullanışlıdır. F kuvvetinin x 'in artış yönünde tanımlı olduğunu tekrar hatırlayarak bu formülü yorumlayalım:

Eğer x artarken $L(x)$ artıyorsa $dL(x)/dx > 0$ demektir. Dolayısıyla $F > 0$ olur. Yani manyetik kuvvet x 'i artırmaya çalışan yöndedir. Yani manyetik kuvvet endüktansı artırmaya çalışan yönde demektir.

Eğer x artarken $L(x)$ azalıyorsa $dL(x)/dx < 0$ demektir. Dolayısıyla $F < 0$ olur. Yani manyetik kuvvet x 'i azaltmaya çalışan yöndedir. Yani manyetik kuvvet, yine endüktansı artırmaya çalışan yönde demektir.

Sonuçta tek sargılı elektromıknatıslarda **manyetik kuvvet daima sargı uçlarından görülen endüktansı artırmaya çalışan yöndedir.**

(Konumuz dışında ama bunu elektrik alan dualiyle karşılaştıralım: Kondansatörün A yüzey alanlı artı ve eksi yüklü levhaları birbirini çekerler. Yani elektrik alan kuvveti levhalar arası mesafeyi (d) azaltmaya çalışan yöndedir. Mesafe azalınca $C = \epsilon A/d$ kapasitansı artar. Yani paralel levhali bir kondansatörde, levhalar arası *elektrik alan kuvveti, kapasitansı artırmaya çalışan yöndedir.*)

Tek sargılı manyetik devrelerde endüktans ve manyetik kuvvet

ϕ manyetik akısı, $R_m(x)$ manyetik relüktanslı bir manyetik devrenin sargısı N sarımlı, i akımlı ise, zincirlenen toplam manyetik akısı $\Psi = N\phi = L(x)i$ olduğundan,

$$F = Ni = R_m(x)\phi = R_m(x) \frac{\Psi}{N} = R_m(x) \frac{L(x)i}{N} = Ni \rightarrow \boxed{L(x) = \frac{N^2}{R_m(x)}}$$

buluruz. Son bulduğumuz manyetik kuvvet formülünü buna göre düzenlersek:

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2}i^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{N^2}{R_m(x)} \right] = \frac{1}{2}(Ni)^2 \frac{d}{dx} [R_m(x)]^{-1} = \frac{1}{2}(Ni)^2(-1)[R_m(x)]^{-2} \frac{dR_m(x)}{dx}$$

$$\boxed{F = -\frac{1}{2} \left(\frac{Ni}{R_m(x)} \right)^2 \frac{dR_m(x)}{dx}}$$

$$\boxed{F = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR_m(x)}{dx}}$$

Konumuzun başındaki manyetik devre için akı yolu üzerindeki toplam manyetik relüktansı

$$R_m(x) = R_m^{Fe} + \frac{2x}{\mu_0 A}$$

R_m^{Fe} relüktansı, ferromanyetik kısımların toplam manyetik relüktansı olup x 'ten bağımsızdır. x 'e bağımlı olan, sadece hava aralıklarının manyetik relüktansıdır. Bu yüzden

$$\frac{dR_m(x)}{dx} = \frac{2}{\mu_0 A} \rightarrow F = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{2}{\mu_0 A}$$

Yani şekildeki hareketli alt parça üzerindeki manyetik kuvvet

$$F = -\frac{\phi^2}{\mu_0 A} = -\frac{A}{\mu_0} B^2$$

olmaktadır. Bu kuvvetin eksi olmasının anlamı, mutlak değerce kuvvetin, x 'i azaltmaya çalışan yönde olduğudur. Yani hareketli parça yukarı doğru çekilmektedir.

Aslında simetriden dolayı bu kuvvetin yarısının akının geçtiği sağdaki, yarısının soldaki hava aralığı üzerinden alt parçaya etkiğini anlayabiliyoruz. Dolayısıyla genel olarak konuşursak, düzgün bir ϕ manyetik akısına veya B manyetik akı yoğunluğuna maruz kalan A kesit alanlı bir ferromanyetik malzeme, mutlak değerce

$$|F_{man}| = \frac{\phi^2}{2\mu_0 A} = \frac{A}{2\mu_0} B^2$$

manyetik kuvvetiyle çekilir. Çekilme yönü, endüktansı artırmaya çalışan yöndür. Kalıcı mıknatıslarda elektron hareketleri sargı akımı gibi davrandığından, ferromanyetik malzeme mıknatısa doğru çekilir. Bu kuvvet, B veya ϕ 'nin işaretinden bağımsızdır. Ortalama kuvvet ise B veya ϕ 'nin kare ortalamasıyla yani rms kareleriyle orantılıdır.

Örnek

Yandaki şekilde hareketli pim üzerindeki manyetik kuvveti (F) bulalım:

Ferromanyetik nüve içinde $\mu \approx \infty$ varsayarsak

$$R_m = R_m^{Fe} + R_{m0}(x) = R_{m0}(x) = \frac{2g}{\mu_0 A}$$

Burada A , akının hava aralığından pime girip çıktığı etkin kesit alanıdır ve

$$A = (a - |x|) \cdot d$$

(x eksi olsaydı da kesit alanı azalacağı için mutlak değer var). Ferromanyetik kısımlarda $\mu \approx \infty$ olduğu için manyetik relüktans sadece hava aralıklarından hesaplanır:

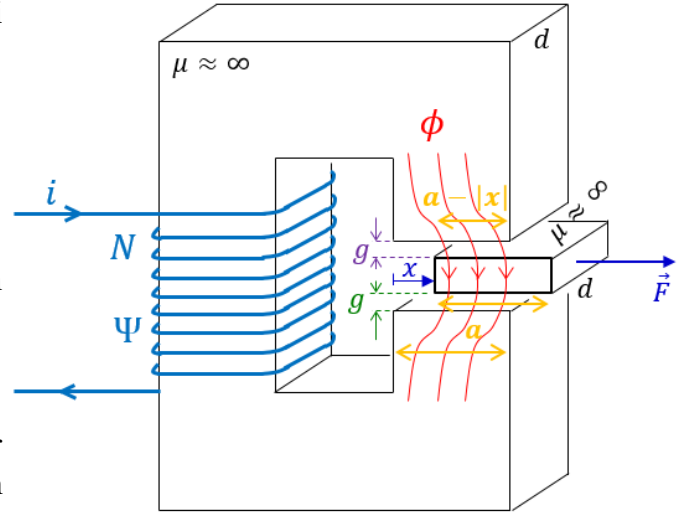
$$R_m(x) = \frac{2g}{\mu_0 A} = \frac{2g}{\mu_0 (a - |x|) \cdot d}$$

$$L(x) = \frac{N^2}{R_m(x)} = \frac{\mu_0 N^2 d}{2g} (a - |x|)$$

$$\frac{dL(x)}{dx} = -\frac{\mu_0 N^2 d}{2g} \cdot \frac{|x|}{x}$$

$|x|$ 'in x 'e göre türevi, $|x|/x$ ya da $x/|x|$ şeklinde yazılabilir ve $x = 0$ 'da tanımsızdır. Bu türevi kullanarak

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{\mu_0 N^2 d}{4g} i^2 \cdot \frac{|x|}{x} = F = \begin{cases} -\frac{\mu_0 N^2 d}{4g} i^2 & x > 0 \text{ ise} \\ \frac{\mu_0 N^2 d}{4g} i^2 & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$



Yani mutlak değerce kuvvet, pimi hizaya çeken yöndedir. Gerçekte $x < 0$ ile $x > 0$ geçişi çok keskin olmadığı için $x = 0$ 'da $F = 0$ olduğu tahmin edilebilir.

Not

Dönüş hareketlerinde, kuvvet (F) ve mesafe (x) yerine tork (T) ve açı (θ) kullanımı tercih edilir. Diferansiyel iş

$$Fdx = Td\theta$$

olduğu için, bu durumda formüllerin şöyle düzenlenmiş biçimleri kullanılır:

$$F = -\frac{\partial W_{man}(\Psi, x)}{\partial x} \rightarrow T = -\frac{\partial \hat{W}_{man}(\Psi, \theta)}{\partial \theta}$$

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dx} \rightarrow T = \frac{1}{2}i^2 \frac{d\hat{L}(\theta)}{d\theta}$$

Burada, manyetik enerji ve endüktans fonksiyonlarının x yerine θ 'ya göre düzenlenmişlerini, sembollerine şapka (^) ekleyerek gösterdik.

Örnek

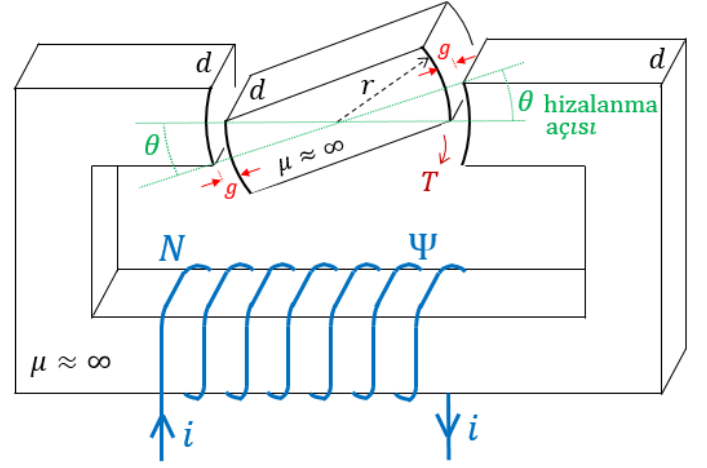
Yandaki şekilde, rotor denilen dönebilen parça üzerindeki döndürme torkunu (T) bulalım:

$$\hat{L}(\theta) = \frac{N^2}{\hat{R}_m(\theta)}$$

Ferromanyetik malzemeler içinde $\mu \approx \infty$ varsayarsak

$$\hat{R}_m(\theta) = \hat{R}_m^{Fe} + \hat{R}_{m0}(\theta) = \hat{R}_{m0}(\theta) = \frac{2g}{\mu_0 A}$$

Burada hizalanan kısmın kesit alanını iç ve dış yarıçapların ortalaması üzerinden hesaplayalım.



$$A = \left(r + \frac{1}{2}g\right)\theta d$$

$$\hat{R}_m(\theta) = \frac{2g}{\mu_0 \left(r + \frac{1}{2}g\right)\theta d} \rightarrow \hat{L}(\theta) = \frac{N^2}{\hat{R}_m(\theta)} = \frac{\mu_0 N^2 \left(r + \frac{1}{2}g\right)d}{2g} \theta$$

$$\frac{d\hat{L}(\theta)}{d\theta} = \frac{\mu_0 N^2 \left(r + \frac{1}{2}g\right)d}{2g}$$

Bu türevi kullanarak

$$T = \frac{1}{2}i^2 \cdot \frac{d\hat{L}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2}i^2 \cdot \frac{\mu_0 N^2 \left(r + \frac{1}{2}g\right)d}{2g} \rightarrow T = \frac{\mu_0 N^2 \left(r + \frac{1}{2}g\right)d}{4g} \cdot i^2$$

bulunur.