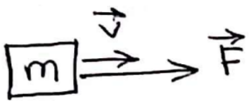
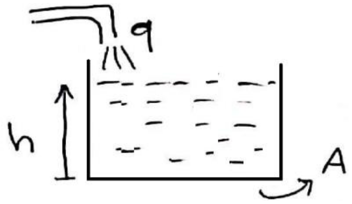
TÜREVSEL DEVRE ELEMANLARI

Genel olarak bir elemanın matematiksel modelinde türevi alınan büyüklük, o elemanın, değişimine karşı koyduğu büyüklüktür. Matematiksel modellerin yorumları genel mühendislikte, hatta ekonomi gibi pek çok alanda benzerdir.

Mesela mekanikte sabit kütlenin (m) kuvvet($\vec{F}$)-hız($\vec{v}$) ilişkisinin $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ olmasından anlarız ki "*kütle, hızdaki değişime karşı koyma özelliğidir*". Hızı ani değiştirmek için sonsuz kuvvet gerekir. Kuvvet yoksa hız sabittir. Yani bir bakıma "*kütle, hızı depolayan bir elemandır*". Hızdaki titreşimleri veya dalgalanmaları azaltmak (filtrelemek) için kütle kullanılır. Kütle ne kadar büyükse hızdaki titreşimler o kadar yavaşlar.





Mesela hidrolikte deponun veya havuzun (taban alanı A olsun) seviye(h)-giriş debisi(q) ilişkisinin $q = A\frac{dh}{dt}$ olmasından anlarız ki "*taban alanı, seviyedeki değişime karşı koyma özelliğidir*". Seviyeyi ani değiştirmek için sonsuz debi gerekir. Debi yoksa seviye sabittir. Yani bir bakıma "*sıvı seviyesini depolama özelliği, havuzun taban alanıyla ifade edilir*" (bu modelde yükseklik sınırı olmadığını düşünüyoruz). Mesela plajdaki dalgaları azaltmak (filtrelemek) için dalgakıran ile bir tür havuz yapılır. Taban alanı ne kadar büyükse dalgalar o kadar azalır.

(Bu modelde dalgakıran ağzının darlığı=1/genişliği, akış direncidir ve filtreleme özelliğini artıran diğer bir parametredir, kütle örneğindeki sürtünme katsayısı gibi.)

Mesela döviz kurundaki dalgalanmaları azaltmak için döviz depolamak gerekir. Merkez Bankası, belirli bir döviz ucuzlarsa alımı artırarak, pahalanırsa satışı artırarak fiyattaki değişime azaltıcı etki uygular.

Türevsel elemanlar, modelde türevi alınan (filtrelenen) büyüklüğün değişiminde gecikmeye de sebep olurlar. Mesela kütle, toprak veya su deposu aynı zamanda ısıyı da depoladığı için, kuyu suları yazın serin, kışın ılık olur. Yerküre ısıyı depoladığı için, bir yarımkürede yılın en sıcak günleri Güneş ışınlarının en dik geldiği günler değil bir iki ay sonrası, yılın en soğuk günleri de Güneş ışınlarının en eğik geldiği günler değil bir iki ay sonrasıdır.

Elektrik devrelerinde de akım-gerilim ilişkisi türevsel ifade edilen başlıca iki devre elemanı vardır: Kondansatör ve bobin. Bunlar depolama ve filtreleme amaçlarıyla kullanıldığı gibi geciktirme amacıyla da kullanılır.

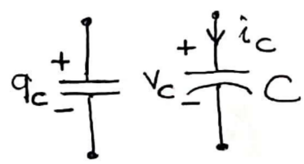
Kondansatör (Kapasitör = Sığaç)

Elektrik yükünü (q_C), veya onunla orantılı gerilimi (v_C) depolayan devre elemanıdır.

$$q_C = Cv_C$$

Aradaki orantı katsayısına (C), "*kapasitans*", "*kapasite*" ya da "*sığa*" (*sığ*mak kökünden, aynı gerilim için ne kadar çok yük sığdırabileceğimizin ölçüsü) denir. Akım tanımı $i_C = dq_C/dt$ gereğince akım-gerilim ilişkisi:

$$\boxed{i_C = C\frac{dv_C}{dt}}$$



Yani *kapasitans, gerilimdeki değişime karşı koyma özelliğidir.*

Kapasitans birimi: *farad* = F = s/Ω

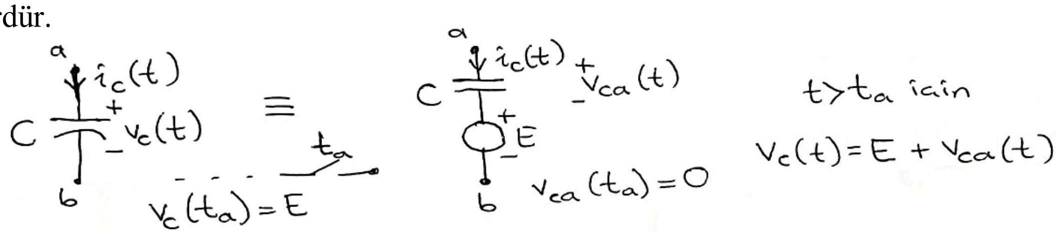
$$\boxed{v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{\tau=-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau}$$

Buna göre kondansatör açık devre durumundayken, yani $i_C = 0$ iken gerilimi saklar.

Dolayısıyla kondansatör boş ($v_C = 0$) iken yapılacak bir anahtarlamadan sonraki ilk anda eşdeğeri kısa devredir (yine $v_C = 0$). İlk an akımı buna göre bulunabilir.

DC devrelerde denge durumunda ise $\lim_{t\to\infty} i_C(t) = 0$ yani kondansatörün eşdeğeri açık devredir. Denge gerilimi buna göre bulunabilir. (*Kondansatörün doğrudan ideal akım kaynağına seri bağlanması hariç; çünkü bu durumda gerilim sonsuza kadar zamana göre doğrusal artar, dengeye ulaşamaz*).

E gerilimine sahip iken kondansatörün devredeki bir anahtarlamadan sonraki eşdeğeri, *E* gerilim kaynağı ve ona seri, ilk anda boş kondansatördür.



V gerilimine sahip bir kondansatörde depolanan enerji:

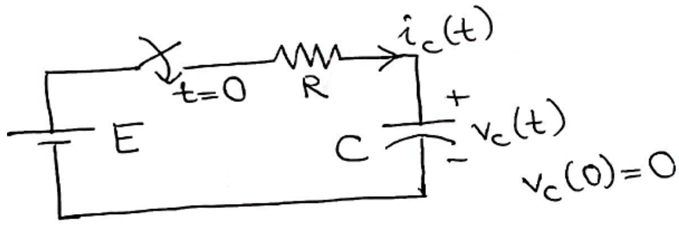
$$W_C = \int_{v_C=0}^{V} v_C(\tau) i_C(\tau) d\tau = \int_{v_C=0}^{V} C v_C dv_C = \boxed{W_C = \frac{1}{2} C V^2}$$

v_C 'yi aniden değiştirmek için sonsuz i_C akımı gerekir, yani gerilimi ani değiştiremeyiz. Eğer yasak bağlantılarla aniden değiştirirsek, güç bir an için sonsuz olacağından *ark* oluşur (kıvılcım saçılır). Mesela dolu iken bir kondansatörü kısa devre edersek veya başka gerilim değerinde bir kondansatöre veya ideal gerilim kaynağına paralel bağlarsak ark yapar. Böyle durumlarda normal devre hesabına göre enerji korunumu görülmeyebilir; bilakis arktan hemen önceki ve hemen sonraki enerji farkından, ark sırasında etrafa saçılan enerji hesaplanabilir.

Kondansatörü gerilim kaynağıyla doldurmak için arada seri direnç kullanılmalıdır. Veya sabit akım kaynağıyla doldurmak için arada paralel direnç kullanılmalıdır. Böylece RC devreleri denilen türden devreler elde edilir. Bu tür devreler yine düğüm ya da çevre yöntemiyle analiz edilir; fakat denklemleri diferansiyel denklemler olur.

Örnek:

Çevre denklemi $E - Ri_C - v_C = 0$ kondansatörün türevsel akım-gerilim ilişkisi kullanılarak düzenlenirse 1. mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem olur:



$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

Bu denklemin homojen çözümü için özdeğer (karakteristik kök) λ şöyle bulunur: $RC\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$

Homojen çözüm: $v_{Ch}(t) = ke^{\lambda t} = ke^{-t/\tau}$ Burada *k* başlangıç şartına bağlı sabit, $\tau = RC$ ise *zaman sabiti*dir ($-1/\lambda$). Zaman sabiti ne kadar büyükse kondansatörün gerilim ve akım değişimi o kadar yavaştır.

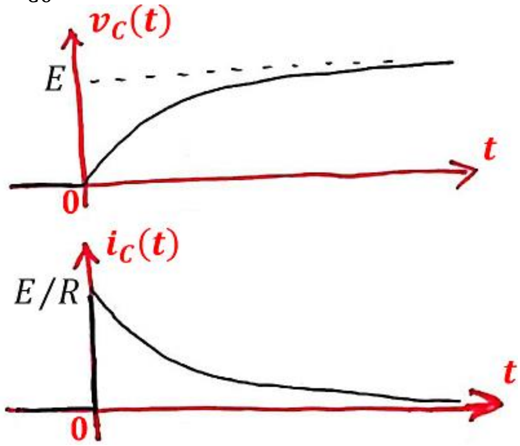
Sağ tarafta *E* sabit olduğu için özel çözüm $v_{Cö}$ sabittir: $RC\frac{dv_{Cö}}{dt} + v_{Cö} = v_{Cö} = E$

Genel çözüm: $v_C(t) = v_{Ch}(t) + v_{Cö}(t) = ke^{-t/\tau} + E$

Başlangıç şartı kullanılarak: $v_C(0) = ke^0 + E = 0 \quad \rightarrow \quad k = -E$ bulunur ve genel çözümde yerine konularak $t \geq 0$ için:

$$\boxed{v_C(t) = E\left(1 - e^{-t/(RC)}\right)}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = \boxed{i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)}}$$



Bu grafiklerden akım ve gerilimin anahtarlamadan hemen sonraki ve dengedeki değerleri için söylediklerimiz görülebilmektedir.

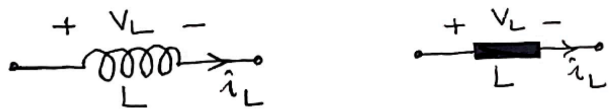
Bobin (Endüktör = İndüktör)

Zincirlenen toplam manyetik akıyı ($\psi_L = N\phi$, burada N sarım sayısı, ϕ her sarımdaki manyetik akıdır), veya onunla orantılı akımı (i_L) depolayan devre elemanıdır.

$$\psi_L = Li_L$$

Aradaki orantı katsayısına (L), "*endüktans*" veya "*indüktans*" (aynı akım için ne kadar çok zincirlenen manyetik akı elde edebileceğimizin ölçüsü) denir. Faraday indüksiyon yasasına göre sargıda (bobinde) endüklenen <u>zıt</u> elektromotor kuvvet (emk = gerilim) $v_L = N\,d\phi/dt = d\psi_L/dt$ gereğince akım-gerilim ilişkisi:

$$\boxed{v_L = L\frac{di_L}{dt}}$$



yani *endüktans, akımdaki değişime karşı koyma özelliğidir*.

Endüktans birimi: *henry* = H = Ωs

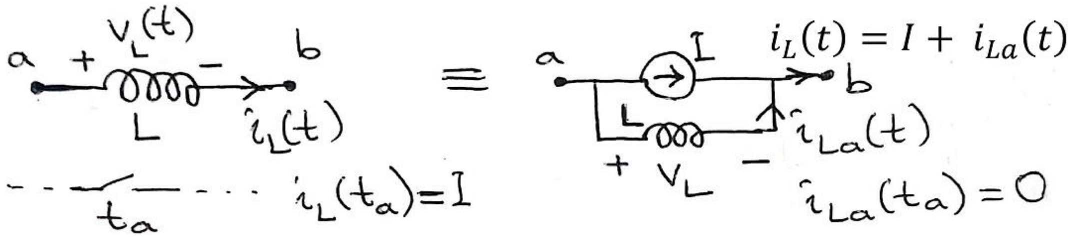
$$\boxed{i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{\tau=-\infty}^{t} v_L(\tau)d\tau}$$

Buna göre bobin kısa devre durumundayken, yani $v_L = 0$ iken akımı saklar.

Dolayısıyla bobin boş ($i_L = 0$) iken yapılacak bir anahtarlamadan sonraki <u>ilk anda</u> eşdeğeri <u>açık devre</u>dir (yine $i_L = 0$). İlk an gerilimi buna göre bulunabilir.

DC devrelerde <u>denge durumunda</u> ise $\lim_{t\to\infty} v_L(t) = 0$ yani bobinin eşdeğeri <u>kısa devre</u>dir. Denge akımı buna göre bulunabilir. (*Bobinin doğrudan ideal gerilim kaynağına paralel bağlanması hariç; çünkü bu durumda akım sonsuza kadar zamana göre doğrusal artar, dengeye ulaşamaz*).

I akımına sahip iken bobinin devredeki bir anahtarlamadan sonraki eşdeğeri, *I* akım kaynağı ve ona paralel, ilk anda boş bobindir.



I akımına sahip bir bobinde depolanan enerji:

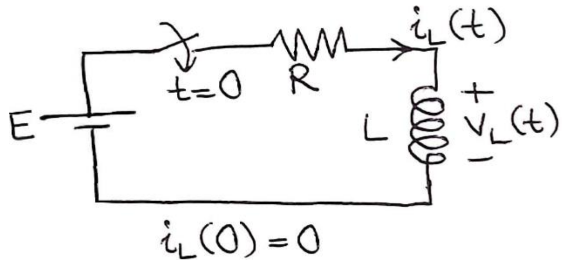
$$W_L = \int_{i_L=0}^{I} v_L(\tau)i_L(\tau)d\tau = \int_{v_C=0}^{I} Li_L di_L = \boxed{W_L = \frac{1}{2}LI^2}$$

i_L 'yi aniden değiştirmek için sonsuz v_L gerilimi gerekir, yani akımı ani değiştiremeyiz. Eğer yasak bağlantılarla aniden değiştirirsek, güç bir an için sonsuz olacağından ark oluşur. Mesela dolu iken bir bobini açık devre edersek veya başka akım değerinde bir bobine veya ideal akım kaynağına seri bağlarsak ark yapar. Böyle durumlarda normal devre hesabına göre enerji korunumu görülmeyebilir; bilakis arktan hemen önceki ve hemen sonraki enerji farkından, ark sırasında etrafa saçılan enerji hesaplanabilir.

Bobini akım kaynağıyla doldurmak için arada paralel direnç kullanılmalıdır. Veya gerilim kaynağıyla doldurmak için arada seri direnç kullanılmalıdır. Böylece RL devreleri denilen türden bir devre elde edilir. Bu tür devreler yine düğüm ya da çevre yöntemiyle analiz edilir; fakat denklemleri diferansiyel denklemler olur.

Örnek:

Çevre denklemi $E - Ri_L - v_L = 0$ bobinin türevsel akım-gerilim ilişkisi kullanılarak düzenlenirse 1. mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem olur:



$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = E$$

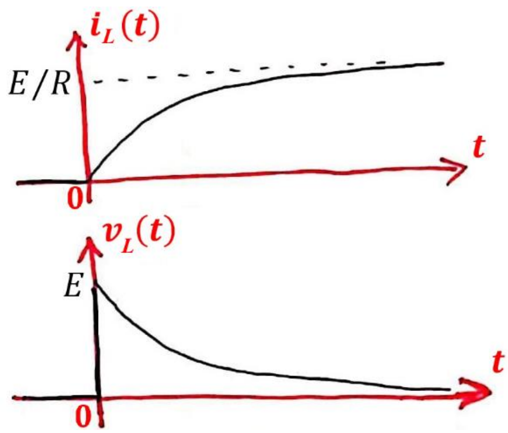
Bu denklemin homojen çözümü için özdeğer (karakteristik kök) λ şöyle bulunur: $L\lambda + R = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{R}{L}$

Homojen çözüm: $i_{Lh}(t) = ke^{\lambda t} = ke^{-t/\tau}$ Burada k başlangıç şartına bağlı sabit, $\tau = L/R$ ise zaman sabitidir $(-1/\lambda)$. Zaman sabiti ne kadar büyükse bobin değerlerindeki değişim o kadar yavaştır.

Sağ tarafta E sabit olduğu için özel çözüm $i_{Lö}$ sabittir: $L\frac{di_{Lö}}{dt} + Ri_{Lö} = E \quad \rightarrow \quad i_{Lö} = E/R$

Genel çözüm: $i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lö}(t) = ke^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$

Başlangıç şartı kullanılarak: $i_L(0) = ke^0 + \frac{E}{R} = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{E}{R}$ bulunur ve genel çözümde yerine konularak $t \geq 0$ için



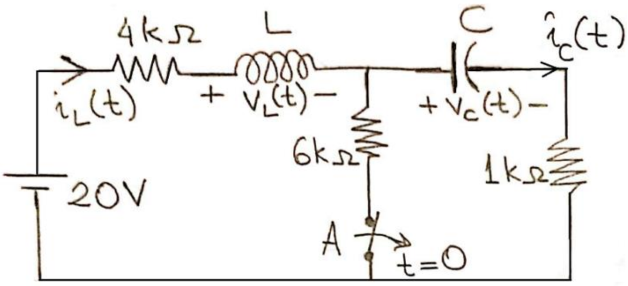
$$\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)}$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = \boxed{v_L(t) = Ee^{-t/(RC)}}$$

Bu grafiklerden akım ve gerilimin anahtarlamadan hemen sonraki ve dengedeki değerleri için söylediklerimiz görülebilmektedir.

Hem direnç, hem bobin, hem kondansatör kullanılan devreler RLC devreleri diye anılır (harf sırası değişebilir). Bunların analizi de yine düğüm ya da çevre yöntemiyle yapılır ve diferansiyel denklem çözümü gerekir.

Örnek:



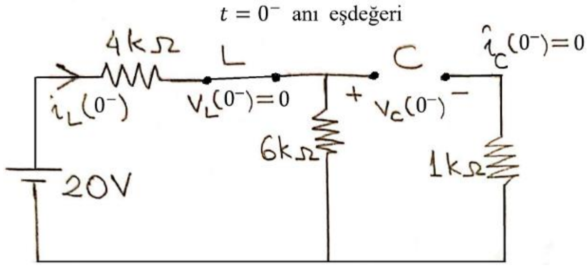
Yandaki devre, göründüğü haliyle dengeye gelecek kadar uzun bir süre çalıştıktan sonra $t = 0$ anında A anahtarı açılıyor. Şunları bulunuz:

$i_L(0) = ?$ $\quad v_C(0) = ?$

$v_L(0^+) = ?$ $\quad i_C(0^+) = ?$

$i_L(\infty) = ?$ $\quad v_C(\infty) = ?$

$t = 0^-$ anı eşdeğeri

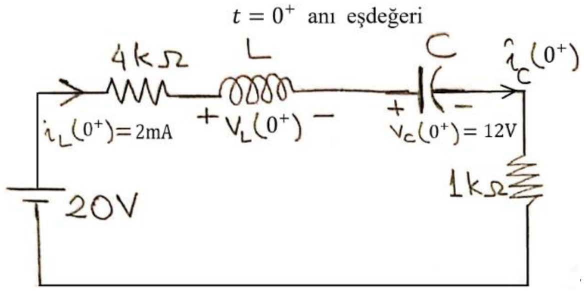


Çözüm: $t = 0^-$ anında dengeye ulaşıldığı için devrenin eşdeğerinde bobin kısa devre, kapasitör açık devre olur. Bobinin akımı ve kondansatörün gerilimi aniden değişmeyeceği için:

$$i_L(0^-) = \frac{20\text{V}}{4\text{k}\Omega + 6\text{k}\Omega} = \boxed{i_L(0) = 2\text{mA}}$$

Kondansatör ise 6kΩ'un gerilimine sahip olur: $v_C(0^-) = 6\text{k}\Omega \times 2\text{mA} = \boxed{v_C(0) = 12\text{V}}$

$t = 0^+$ anı eşdeğeri



$t = 0^+$ anından itibaren bir ucu açılan 6kΩ etkisiz olur. Bobinin akımı aniden değişmeyeceği ve bobinle kondansatör seri olduğu için: $i_L(0^+) = \boxed{i_C(0^+) = 2\text{mA}}$

Çevre denkleminden ve kondansatörün gerilimi aniden değişmeyeceği için

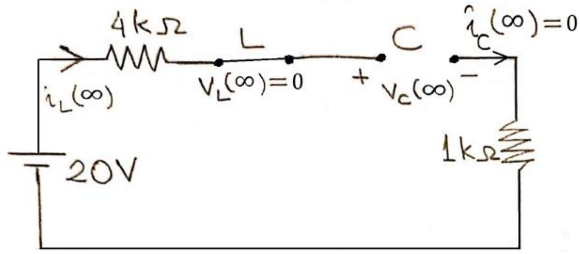
$$20\text{V} - 4\text{k}\Omega \times 2\text{mA} - v_L(0^+) - 12\text{V} - 1\text{k}\Omega \times 2\text{mA} = 0 \;\rightarrow \boxed{v_L(0^+) = -2\text{V}}$$

Bundan sonra $t \rightarrow \infty$ için yeniden dengeye ulaşılır ve bobin kısa devre, kapasitör açık devre olur. $i_C(\infty) = \boxed{i_L(\infty) = 0\text{mA}}$

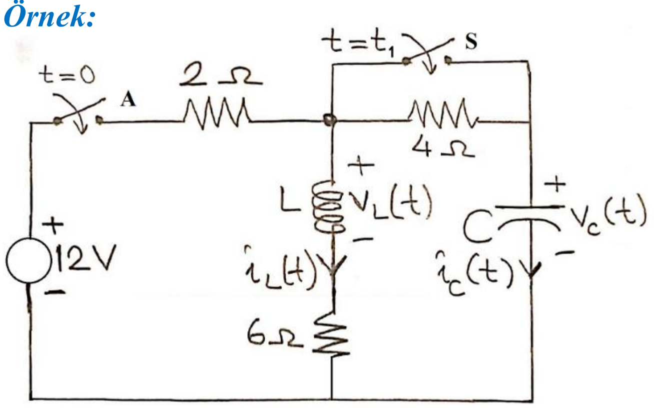
Akım kesildiği için tüm kaynak gerilimi de kondansatör üzerine düşer:

$$20\text{V} - (4+1)\text{k}\Omega \times 0\text{mA} - 0\text{V} - v_C(\infty) = 0 \;\rightarrow \boxed{v_C(\infty) = 20\text{V}}$$

$t = \infty$ eşdeğeri



Örnek:



Yandaki devrede bobin ve kondansatör <u>boş</u> iken A anahtarı $t = 0$ anında kapatılıyor. Dengeye gelecek kadar uzun bir süre beklendikten sonra $t = t_1$ anında S anahtarı da kapatılıyor. Şunları bulunuz:

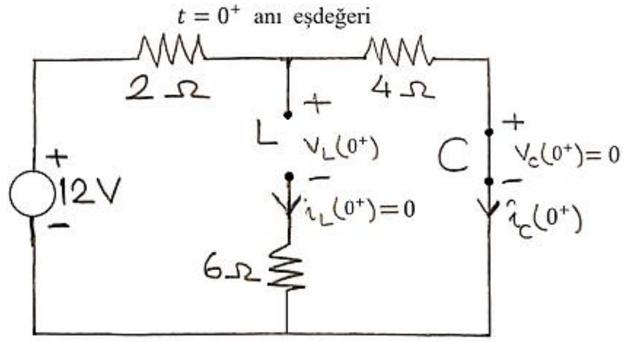
$v_L(0^+) = ?$ $\quad i_C(0^+) = ?$

$i_L(t_1^-) = ?$ $\quad v_C(t_1^-) = ?$

$v_L(t_1^+) = ?$ $\quad i_C(t_1^+) = ?$

Çözüm:

$t = 0^+$ anı eşdeğeri

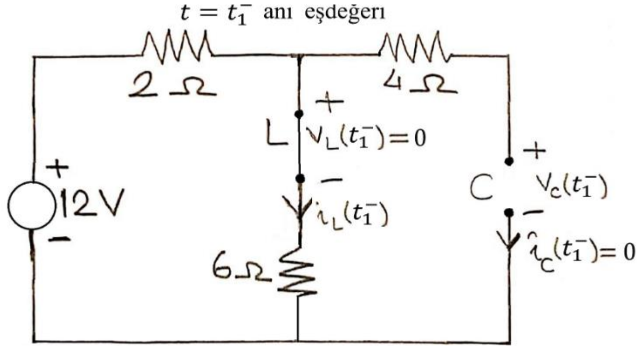


$t = 0^+$ anında boş bobin açık devre, boş kondansatör kısa devredir. Bir ucu açık devre olan 6Ω etkisizdir.

$$i_C(0^+) = \frac{12\text{V}}{2\Omega + 4\Omega} = \boxed{i_C(0^+) = 2\text{A}}$$

$$v_L(0^+) = 4\Omega \times 2\text{A} = \boxed{v_L(0^+) = 8\text{V}}$$

$t = t_1^-$ anı eşdeğeri

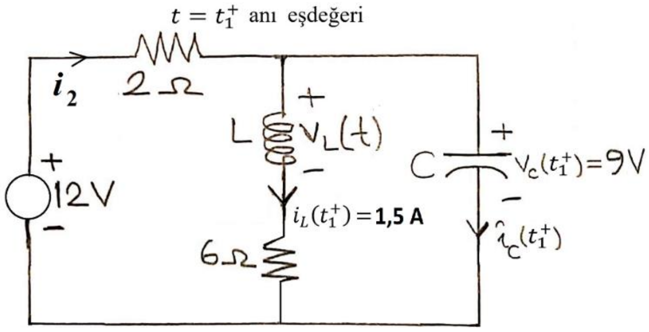


$t = t_1^-$ anında (dengede) bobin kısa devre, kondansatör açık devredir. Bir ucu açık devre olan 4Ω etkisizdir.

$$i_L(t_1^-) = \frac{12\text{V}}{2\Omega + 6\Omega} = \boxed{i_L(t_1^-) = 1{,}5\text{A}}$$

$$v_C(t_1^-) = 6\Omega \times 1{,}5\text{A} = \boxed{v_C(t_1^-) = 9\text{V}}$$

$t = t_1^+$ anı eşdeğeri



$t = t_1^+$ anında, paralel kısa devre edilen 4Ω etkisiz kalır. Bobinin akımı ve kondansatörün gerilimi, anahtarlamadan hemen önceki değerleriyle aynıdır.

$$6\Omega \times 1{,}5\text{A} + v_L(t_1^+) - 9V = 0 \;\rightarrow\; \boxed{v_L(t_1^+) = 0\text{V}}$$

$$i_C(t_1^+) = i_2 - 1{,}5\text{A}$$

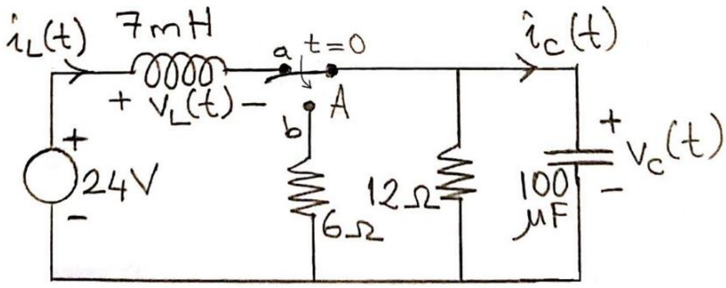
2Ω üzerindeki akım $i_2 = \frac{12\text{V}-9\text{V}}{2\Omega} = 1{,}5A \;\rightarrow \boxed{i_C(t_1^+) = 0\text{A}}$

Örnek:

Yandaki devre, göründüğü haliyle dengeye gelecek kadar uzun bir süre çalıştıktan sonra $t = 0$ anında A anahtarı a konumundan b konumuna alınıyor. Şunları bulunuz:

$i_L(0^-) = ?\quad v_C(0^-) = ?\quad i_C(0^+) = ?$

Anahtarın konum değişimi sırasında endüktansın durumunu açıklayınız.

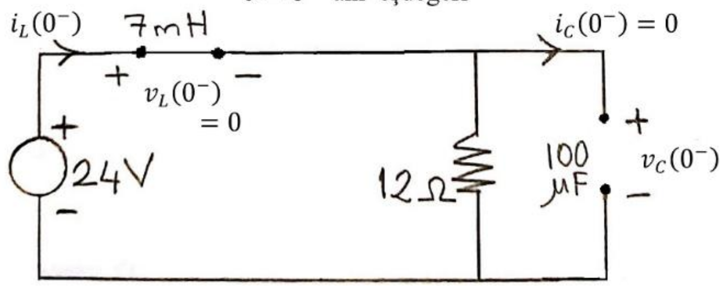


Çözüm:

$t = 0^-$ anında dengeye ulaşıldığı için devrenin eşdeğerinde bobin kısa devre, kapasitör açık devre olur.

$$i_L(0^-) = \frac{24\text{V}}{12\Omega} = \boxed{i_L(0^-) = 2\text{A}}$$

$t = 0^-$ anı eşdeğeri



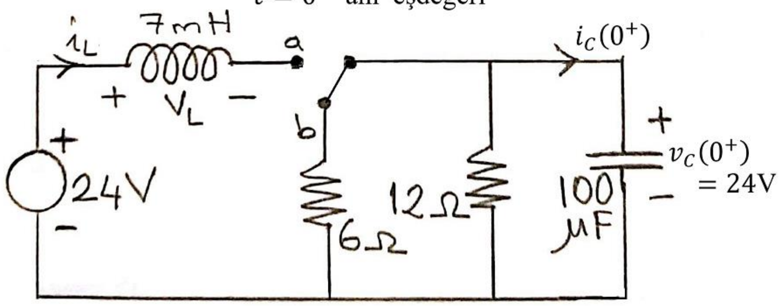
Kondansatör, kaynak ile paralel sayılacağından $\boxed{v_C(0^-) = 24\text{V}}$

$t = 0^+$ anında kondansatör gerilimi aynı değerindedir: $v_C(0^+) = 24\text{V}$. Yön tanımına dikkat edilirse

$$i_C(0^+) = -v_C(0^+)\left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega}\right)$$

$$\boxed{i_C(0^+) = -6A}$$

$t = 0^+$ anı eşdeğeri



Akım taşıyan endüktans ise aniden açık devre edildiği için bir anda ark yaparak enerjisini kaybeder. Akımı bir anda sıfıra düşerken, akımın türeviyle orantılı olan gerilimi bir anlık eksi sonsuza gidip anında tekrar sıfırlanır. Endüktans-akım ikilisini kütle-hız modeline benzetirsek, bu durum hızla giden bir otomobilin aniden bir kayalığa çarparak hızını kaybetmesine benzer ve amaç kıvılcım çaktırmak değilse sakıncalıdır. Normalde dolu bir endüktans devreden çıkarılacaksa ona ters paralel bir diyot bağlanır ki anahtarı açılınca akımını diyot üzerinden dolaştırarak zamanla enerji azalmasıyla kaybetsin. Bu da kütle benzetimindeki otomobilin önüne aniden bir bariyer çıkartılarak yolu kesilirken, ona yanda halka şeklinde bir yol açarak hızını ve enerjisini güvenli bir şekilde zamana yayarak kaybettirmek gibidir.