

ELEKTROMANYETİK ALAN TEORİSİ VİZE ÇALIŞMA SORULARI

Soru 1.1) Kartezyen koordinatlarda verilen $N(x, y, z) = N(-2, 2, 6)$ noktasının,

a) Silindirik koordinatlardaki karşılığı $N_s(\rho, \varphi, z)$ nedir? Konum vektörü $\vec{P}$ silindirik koordinatlarda nedir?

b) Küresel koordinatlardaki karşılığı $N_k(r, \theta, \varphi)$ nedir? Konum vektörü $\vec{P}$ küresel koordinatlarda nedir?

Çözüm: a) Kartezyen'den silindiriğe konum dönüşümü:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$x < 0 \text{ olduğu için } \varphi = \tan^{-1}(y/x) + \pi = \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)}_{-\pi/4} + \pi = 3\pi/4$$

$$\text{ve } z = z = 6 \text{ olduğundan, } \boxed{N_s(\rho, \varphi, z) = N_s(2\sqrt{2}, 3\pi/4, 6)}$$

Konum vektörü, orijinden ilgili $N_s(\rho, \varphi, z)$ noktasına yönelmiş vektör olup $\hat{\varphi}$ yönünde bileşeni yoktur:

$$\vec{P} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = \boxed{\vec{P} = 2\sqrt{2}\hat{\rho} + 6\hat{z}}$$

b) Kartezyen'den küresele konum dönüşümü:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{11} \quad \theta = \cos^{-1}(z/r) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{2\sqrt{11}}\right) \approx 25,24^\circ$$

$$x < 0 \text{ olduğu için } \varphi = \tan^{-1}(y/x) + 180^\circ = \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)}_{-45^\circ} + 180^\circ = 135^\circ$$

$$\boxed{N_k(r, \theta, \varphi) = N_k(2\sqrt{11}, 25,24^\circ, 135^\circ)}$$

Dikkat: Açılar ister derece ister radyan olarak yazın, ama ne kullandığınızı bilmelisiniz ve derece ise mutlaka sembolünü de göstermelisiniz. Radyanı, temel açılar dışında kullanmamanız karışıklığı azaltır.

Konum vektörü, orijinden ilgili $N_k(r, \theta, \varphi)$ noktasına yönelmiş vektör olup, sadece radyal bileşenlidir:

$$\boxed{\vec{P} = r\hat{r} = 2\sqrt{11}\hat{r}}$$

Dikkat: Konum vektörü de olsa, silindirik, Kartezyen veya küresel koordinatlarda gösterilmesi, vektörün sembolünü değiştirmez. Sembol ayırımına, koordinatları sıralı yazıldığı için nokta veya sütun matris gösterimlerinde ihtiyaç duyulur.

Soru 1.2) Silindirik koordinatlarda verilen $N_s(\rho, \varphi, z) = N_s(4, \pi/6, -2)$ noktasının,

a) Kartezyen koordinatlardaki karşılığı $N(x, y, z)$ nedir? Konum vektörü $\vec{P}$, Kartezyen koordinatlarda nedir?

b) Küresel koordinatlardaki karşılığı $N_k(r, \theta, \varphi)$ nedir? Konum vektörü $\vec{P}$, küresel koordinatlarda nedir?

Çözüm: a) Silindirikten Kartezyen'e konum dönüşümü:

$$x = \rho \cos \varphi = 4 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y = \rho \sin \varphi = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2$$

$$z = z = -2$$

$$N(x, y, z) = N(2\sqrt{3}, 2, -2)$$

$$\vec{P} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \vec{P} = 2\sqrt{3}\hat{x} + 2\hat{y} - 2\hat{z}$$

b) Silindirikten küresele konum dönüşümü:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \quad \theta = \cos^{-1}(z/r) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{2\sqrt{5}}\right) \approx 116,6^\circ \quad \varphi = \varphi = 30^\circ$$

$$N_k(r, \theta, \varphi) = N_k(2\sqrt{5}, 116,6^\circ, 30^\circ)$$

$$\vec{P} = r\hat{r} = 2\sqrt{5}\hat{r}$$

Dikkat: Silindirik ve Kartezyen koordinatlarda yazılan konum ($\vec{P}$) vektöründen konum bilgisi anlaşılmamaktadır. Konum vektörü konum belirleme vektörü değildir. Öyleyse ne işe yarar? Mesela hız vektörü, konum vektörünün zamana göre türevidir. Diğer tüm vektörler gibi, hız vektörü gibi, konum vektörünün de gerektiğinde hangi konumda olduğunu ayrıca verilmesi gerekir. $\hat{r}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\varphi}$ vektörlerinin türevlerinin, özel durumlar dışında sıfır olmadığını da hatırlatalım.

Soru 1.3) Kartezyen koordinatlarda verilen $\vec{A} = 5\hat{x} + 7\hat{y} - \hat{z}$ vektörünü,

a) Silindirik koordinatlarda, **b)** Küresel koordinatlarda yazınız.

Çözüm: a) Kartezyen'den silindiriğe vektör dönüşümü (dikkat, konum değil!):

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos \varphi + 7 \sin \varphi \\ -5 \sin \varphi + 7 \cos \varphi \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = (5 \cos \varphi + 7 \sin \varphi) \hat{\rho} + (7 \cos \varphi - 5 \sin \varphi) \hat{\varphi} - \hat{z}$$

b) Kartezyen'den küresele vektör dönüşümü (dikkat, konum değil!):

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \sin \theta \cos \varphi + 7 \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \\ 5 \cos \theta \cos \varphi + 7 \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \\ -5 \sin \varphi + 7 \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = (5 \sin \theta \cos \varphi + 7 \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta) \hat{r} + (5 \cos \theta \cos \varphi + 7 \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta) \hat{\theta} + (-5 \sin \varphi + 7 \cos \varphi) \hat{\varphi}$$

Soru 1.4) Küresel koordinatlarda verilen $\vec{A} = 3\hat{r} - 2\hat{\theta} - 6\hat{\varphi}$ vektör alanının $r = 5$, $\theta = 30^\circ$ ve $\varphi = 90^\circ$ konumundaki vektör değerini

a) Kartezyen koordinatlarda yazınız.

b) Silindirik koordinatlarda yazınız.

Dikkat: θ ve φ 'nin eksi olamaması başka şey, herhangi bir vektörün $\hat{\theta}$ ve $\hat{\varphi}$ bileşenlerinin eksi de olabilmesi başka şey.

Çözüm: a) Küreselden Kartezyen'e vektör dönüşümü:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\sin 30^\circ \cos 90^\circ}_0 & \underbrace{\cos 30^\circ \cos 90^\circ}_0 & \underbrace{-\sin 90^\circ}_{-1} \\ \underbrace{\sin 30^\circ \sin 90^\circ}_{1/2} & \underbrace{\cos 30^\circ \sin 90^\circ}_{\sqrt{3}/2} & \underbrace{\cos 90^\circ}_0 \\ \underbrace{\cos 30^\circ}_{\sqrt{3}/2} & \underbrace{-\sin 30^\circ}_{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{A} = 6\hat{x} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)\hat{y} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right)\hat{z}}$$

Dikkat: Soruda konum, yani r , θ ve φ verilmeseydi, cevap önce θ ve φ cinsinden bulunmalı, sonra θ ve φ 'nin x , y , z cinsinden karşılıkları yazılmalıydı.

b) Küreselden silindiriğe vektör dönüşümü:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\sin 30^\circ}_{1/2} & \underbrace{\cos 30^\circ}_{\sqrt{3}/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{\cos 30^\circ}_{\sqrt{3}/2} & \underbrace{-\sin 30^\circ}_{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ -6 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{A} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)\hat{\rho} - 6\hat{\varphi} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right)\hat{z}}$$

Dikkat: Soruda konum, yani r , θ ve φ verilmeseydi, cevap önce θ cinsinden bulunmalı, sonra θ 'nın ρ ve z cinsinden karşılığı yazılmalıydı.

Soru 2.1) $v = 3 + 5xz - yz^2$ skaler alanının, **a) Gradyanını** **b) Laplasyen'ini** bulunuz.

Çözüm: **a)** $\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{z} = \boxed{5z\hat{x} - z^2\hat{y} + (5x - 2yz)\hat{z} = \vec{\nabla}v}$

b) $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 + 0 - 2y = \boxed{\nabla^2 v = -2y}$

Soru 2.2) Silindirik koordinatlarda verilen $v = \frac{\cos \varphi}{\rho+1} + \rho z$ skaler alanının, gradyanını bulunuz.

Çözüm: $\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{z} = \boxed{\left(z - \frac{\cos \varphi}{(\rho+1)^2}\right)\hat{\rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho^2 + \rho}\hat{\varphi} + \rho\hat{z} = \vec{\nabla}v}$

Soru 2.3) Küresel koordinatlarda verilen $v = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{(r+1)^2}$ skaler alanının, gradyanını bulunuz.

Çözüm: $\vec{\nabla}v = \frac{\partial v}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{\varphi} = \boxed{-\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{(r+1)^3}\hat{r} - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r(r+1)^2}\hat{\theta} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r(r+1)^2 \sin \theta}\hat{\varphi} = \vec{\nabla}v}$

Soru 2.4) $\vec{A} = 5xy \hat{x} + 3yz \hat{y} - 9xye^{-|z|} \hat{z}$ vektör alanının **a)** Diverjansını, **b)** Rotasyonelini bulunuz.

Çözüm: **a)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \boxed{5y + 3z + 9xy \frac{z}{|z|} e^{-|z|} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$

Dikkat: $|z|$ 'nin z 'ye göre türevi $z/|z|$ veya $|z|/z$ diye yazılabilir ve $z = 0$ için tanımsızdır.

Bu sorudaki alanın diverjansı her yerde sıfır olmadığı için $\vec{A}$ vektör alanı solenoid değildir.

b)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A} = (-9xe^{-|z|} - 3y) \hat{x} + 9ye^{-|z|} \hat{y} - 5x \hat{z}}$$

Rotasyoneli her yerde sıfır olmadığı için, $\vec{A}$ vektör alanı korunumlu (irrotasyonel) değildir.

Soru 2.5) Silindirik koordinatlarda verilen $\vec{A} = \rho z \sin \varphi \hat{\rho} - (\rho + z) \cos \varphi \hat{\varphi} - 4z^2 \hat{z}$ vektör alanının

a) Diverjansını, **b)** Rotasyonelini bulunuz.

Çözüm: **a)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho^2 z \sin \varphi)}{\partial \rho} + \frac{\rho+z}{\rho} \sin \varphi - 8z$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 2z \sin \varphi + \frac{\rho+z}{\rho} \sin \varphi - 8z}$$

Diverjansı her yerde sıfır olmadığı için $\vec{A}$ vektör alanı solenoid değildir.

b) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$

$$= (0 + \cos \varphi) \hat{\rho} + (\rho \sin \varphi - 0) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial(\rho^2 + \rho z)}{\partial \rho} \cos \varphi - \rho z \cos \varphi \right) \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A} = \cos \varphi \hat{\rho} + \rho \sin \varphi \hat{\varphi} - \left(2 + \frac{z}{\rho} + z \right) \cos \varphi \hat{z}}$$

Rotasyoneli her yerde sıfır olmadığı için, $\vec{A}$ vektör alanı korunumlu (irrotasyonel) değildir.

Soru 2.6) Küresel koordinatlarda verilen $\vec{A} = r \cos \theta \sin \varphi \hat{r} + 2r^2 \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \hat{\varphi}$ vektör alanının, **a)** Diverjansını, **b)** Rotasyonelini bulunuz.

Çözüm: **a)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^3 \cos \theta \sin \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \left(2r^2 \overbrace{\sin \theta \cos \theta}^{(1/2) \sin 2\theta} \cos \varphi \right)}{\partial \theta} + \frac{-\sin \theta \cos \varphi}{r \sin \theta}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3 \cos \theta \sin \varphi + \frac{2r \cos 2\theta \cos \varphi}{\sin \theta} - \frac{1}{r} \cos \varphi}$$

Diverjansı her yerde sıfır olmadığı için $\vec{A}$ vektör alanı solenoid değildir.

$$\text{b) } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}$$

$$\left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) = -2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + 2r^2 \cos \theta \sin \varphi$$

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) = \frac{r \cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} + \sin \theta \sin \varphi$$

$$\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 6r^2 \cos \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi$$

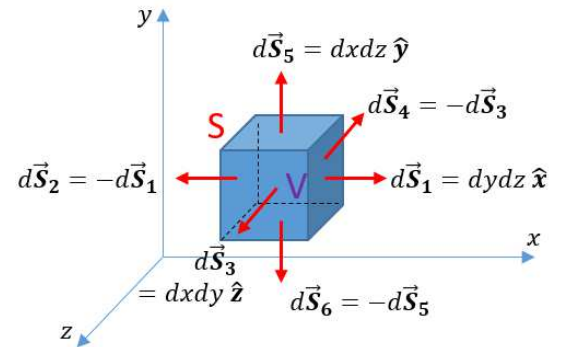
$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(-\frac{2}{r} \cos \theta \sin \varphi + 2r \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \right) \hat{r} + \left(\frac{\cos \varphi}{\tan \theta} + \frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi \right) \hat{\theta} + (6r \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \hat{\varphi}}$$

Rotasyoneli her yerde sıfır olmadığı için, $\vec{A}$ vektör alanı korunumlu (irrotasyonel) değildir.

Soru 3.1) Soru 2.4'te verilen vektör alan için diverjans teoremini, $1 \leq x, y, z \leq 2$ kübü üzerinde doğrulayınız (hem hacimsel, hem yüzeysel integrali alarak).

Çözüm: $\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV \stackrel{?}{=} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Soru 2.4 çözümünde $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 5y + 3z + 9xy \frac{z}{|z|} e^{-|z|}$ bulunmuştu.



$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{z=1}^2 \int_{y=1}^2 \int_{x=1}^2 (5y + 3z + 9xy e^{-z}) dx dy dz$$

Bu bölgede $|z| = z$ olduğu için bazı sadeleştirmeler yapıldığına dikkat ediniz.

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV &= \int_{z=1}^2 \int_{y=1}^2 \left[5xy + 3xz + \frac{9}{2} x^2 y e^{-z} \right]_{x=1}^2 dy dz = \int_{z=1}^2 \int_{y=1}^2 \left[5y + 3z + \frac{27}{2} y e^{-z} \right] dy dz \\ &= \int_{z=1}^2 \left[\frac{5}{2} y^2 + 3yz + \frac{27}{4} y^2 e^{-z} \right]_{y=1}^2 dz = \int_{z=1}^2 \left[\frac{15}{2} + 3z + \frac{81}{4} e^{-z} \right] dz = \left[\frac{15}{2} z + \frac{3}{2} z^2 - \frac{81}{4} e^{-z} \right]_{z=1}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \frac{15}{2} + \frac{9}{2} + \frac{81}{4} (e^{-1} - e^{-2})}$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = I_{sağ} + I_{sol} + I_{ön} + I_{arka} + I_{üst} + I_{alt}$$

şeklinde indislerinden anlaşıldığı gibi 6 parça halinde hesaplayalım. $\vec{A} = 5xy \hat{x} + 3yz \hat{y} - 9xye^{-z} \hat{z}$ idi.

$$I_{sağ} = \int_{sağ} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{z=1}^2 \int_{y=1}^2 \underbrace{5x}_{\frac{10}{2}} y dy dz = \int_{z=1}^2 \underbrace{[5y^2]_{y=1}^2}_{15} dz = [15z]_{z=1}^2 = 15$$

$$I_{sol} = \int_{sağ} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{z=1}^2 \int_{y=1}^2 \underbrace{-5x}_{\frac{-5}{1}} y dy dz = \int_{z=1}^2 \underbrace{\left[-\frac{5}{2}y^2\right]_{y=1}^2}_{-15/2} dz = \left[-\frac{15}{2}z\right]_{z=1}^2 = -\frac{15}{2}$$

$$I_{ön} = \int_{ön} \vec{A} \cdot d\vec{S}_3 = \int_{y=1}^2 \int_{x=1}^2 -9 \underbrace{e^{-z}}_{e^{-2}} xy dx dy = -9e^{-2} \int_{y=1}^2 \underbrace{\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=1}^2}_{3y/2} dy = -\frac{27}{2}e^{-2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{z=1}^2 = -\frac{81}{4}e^{-2}$$

$$I_{arka} = \int_{arka} \vec{A} \cdot d\vec{S}_4 = \int_{y=1}^2 \int_{x=1}^2 9 \underbrace{e^{-z}}_{e^{-1}} xy dx dy = 9e^{-1} \int_{y=1}^2 \underbrace{\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=1}^2}_{3y/2} dy = \frac{27}{2}e^{-1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{z=1}^2 = \frac{81}{4}e^{-1}$$

$$I_{üst} = \int_{üst} \vec{A} \cdot d\vec{S}_5 = \int_{z=1}^2 \int_{x=1}^2 \underbrace{3y}_{\frac{6}{2}} z dx dz = \int_{z=1}^2 \underbrace{[6xz]_{x=1}^2}_{6z} dz = [3z^2]_{z=1}^2 = 9$$

$$I_{alt} = \int_{alt} \vec{A} \cdot d\vec{S}_5 = \int_{z=1}^2 \int_{x=1}^2 \underbrace{-3y}_{\frac{-3}{1}} z dx dz = \int_{z=1}^2 \underbrace{[-3xz]_{x=1}^2}_{-3z} dz = \left[-\frac{3}{2}z^2\right]_{z=1}^2 = -\frac{9}{2}$$

$$I_{sağ} + I_{sol} + I_{ön} + I_{arka} + I_{üst} + I_{alt} = 15 - \frac{15}{2} - \frac{81}{4}e^{-2} + \frac{81}{4}e^{-1} + 9 - \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 12 + \frac{81}{4}(e^{-1} - e^{-2}) = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV} \quad \checkmark$$

Soru 3.2) Soru 2.4'te verilen vektör alan için Stoke teoremini, bir önceki sorudaki kübün üst yüzü için doğrulayınız. Yani S yüzeyini $y = 2$ 'de $1 \leq x, z \leq 2$ karesel bölgesi alınız, hem yüzeysel, hem çizgisel integrali hesaplayarak.

Çözüm: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = (-9xe^{-|z|} - 3y)\hat{x} + 9ye^{-|z|}\hat{y} - 5x\hat{z}$ ve $d\vec{S}_5 = dx dz \hat{y}$ bulmuştuk.

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_5 = \int_{z=1}^2 \int_{x=1}^2 9 \underbrace{y}_{\frac{2}{2}} \underbrace{e^{-|z|}}_{e^{-z}} dx dz = \int_{z=1}^2 \underbrace{[18e^{-z}x]_1^2}_{18e^{-z}} dz = [-18e^{-z}]_1^2 = 18(e^{-1} - e^{-2}) = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_5$$

Çizgisel integral, sağ el kuralına göre başparmak $d\vec{S}_5$ yönündeyken, dört parmağın sardığı yönde kareyi dolaşarak hesaplanmalıdır. Yani ön kenarda $x = 1$ 'den 2 'ye ve $d\vec{l} = dx\hat{x}$, sağ kenarda $z = 2$ 'den 1 'e ve $d\vec{l} = dz\hat{z}$, arka kenarda $x = 2$ 'den 1 'e ve $d\vec{l} = dx\hat{x}$, sol kenarda $z = 1$ 'den 2 'ye ve $d\vec{l} = dz\hat{z}$. Ayrıca bu bölgede $\vec{A} = 5x \underset{2}{y} \hat{x} + 3 \underset{2}{y} z \hat{y} - 9x \underset{2}{y} e^{-z} \hat{z}$

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{x=1}^2 10x dx + \int_{z=2}^1 -18 \underset{2}{x} e^{-z} dz + \int_{x=2}^1 10x dx + \int_{z=1}^2 -18 \underset{1}{x} e^{-z} dz$$

Birinci ve üçüncü integraller toplamının sıfır olduğu sınırlarından bellidir.

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = [36e^{-z}]_2^1 + [18e^{-z}]_1^2 = 36e^{-1} - 36e^{-2} + 18e^{-2} - 18e^{-1}$$

$$\boxed{\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = 18(e^{-1} - e^{-2}) = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_5} \quad \checkmark$$

Soru 3.3) Silindirik koordinatlarda verilen $\vec{A} = 3\rho z \hat{\rho}$ vektör alanında $1 \leq \rho \leq 2$, $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$, $0 \leq z \leq 1$ sınırları arasında kalan bölge (kalın silindir kabuğu dilimi) üzerinde diverjans teoremini doğrulayınız.

Çözüm: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(3\rho^2 z)}{\partial \rho} = 6z$ ve $dV = \rho d\varphi d\rho dz$

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{z=0}^1 \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3} \int_{\rho=1}^2 6\rho z d\rho d\varphi dz = \int_{z=0}^1 \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3} \underbrace{[3z\rho^2]_{\rho=1}^2}_{9z} d\varphi dz = \int_{z=0}^1 \underbrace{[9z\varphi]_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3}}_{3\pi z/2} dz$$

$$= \left[\frac{3\pi}{4} z^2 \right]_{z=0}^1 = \frac{3\pi}{4} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV$$

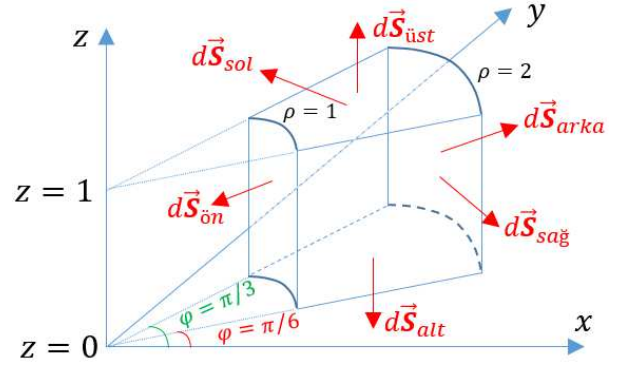
Burada $d\vec{S}_{sağ}$ ve $d\vec{S}_{sol}$ yalnız $\hat{\rho}$ bileşenli, $d\vec{S}_{üst}$ ve $d\vec{S}_{alt}$ yalnız $\hat{z}$ bileşenli olduğundan, yalnız $\hat{\rho}$ bileşenli $\vec{A}$ ile skaler çarpımları sıfırdır. Bu yüzden

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{ön} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ön} + \int_{arka} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{arka}$$

$d\vec{S}_{ön} = \rho d\varphi dz (-\hat{\rho})$ ve $d\vec{S}_{arka} = \rho d\varphi dz \hat{\rho}$ olup, önde $\rho = 1$, arkada $\rho = 2$ 'dir.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{z=0}^1 \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3} \underbrace{-3\rho^2}_{-3} z d\varphi dz + \int_{z=0}^1 \int_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3} \underbrace{3\rho^2}_{12} z d\varphi dz$$

$$= \int_{z=0}^1 \underbrace{[-3z\varphi]_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3}}_{-3\pi z/2} dz + \int_{z=0}^1 \underbrace{[12z\varphi]_{\varphi=\pi/6}^{\pi/3}}_{12\pi z/6=2\pi z} dz = \underbrace{\left[-\frac{\pi}{4} z^2 \right]_0^1}_{-\pi/4} + \underbrace{[\pi z^2]_0^1}_{\pi} = \frac{3\pi}{4} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \checkmark$$



Soru 3.4) Silindirik koordinatlarda verilen $\vec{A} = (\rho^2 - 2\rho) \hat{\phi}$ vektör alanında, $z = 0$ düzleminde $1 \leq \rho \leq 2$, $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$ bölgesinde Stoke teoremini doğrulayınız.

Çözüm: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} \right) \hat{z}$

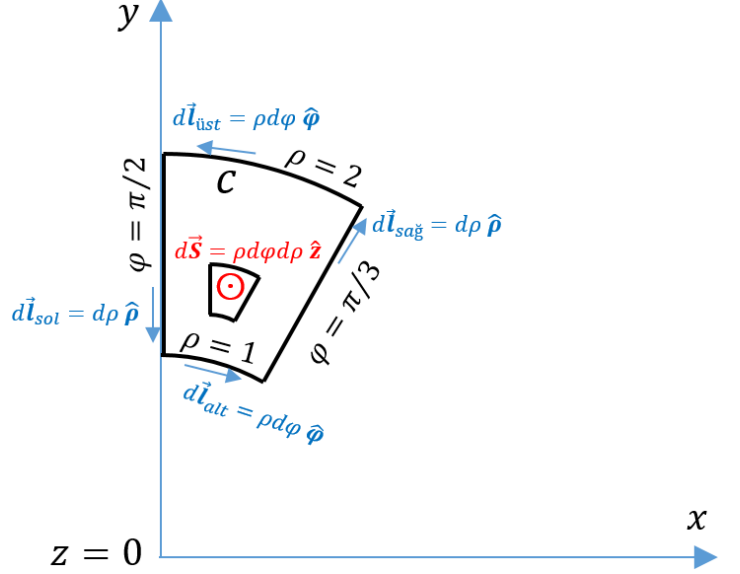
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho^3 - 2\rho^2)}{\partial\rho} \hat{z} = \frac{3\rho^2 - 4\rho}{\rho} \hat{z} = (3\rho - 4) \hat{z}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{\rho=1}^2 \int_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2} (3\rho - 4) \rho d\varphi d\rho$$

$$= \int_{\rho=1}^2 \underbrace{[(3\rho - 4) \rho]_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2}}_{(3\rho-4)\rho \frac{\pi}{6}} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{\rho=1}^2 (3\rho^2 - 4\rho) d\rho = \frac{\pi}{6} \underbrace{[\rho^3 - 2\rho^2]_1^2}_1$$

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{6}}$$



Dikkat: Çizgisel integral alınırken $d\vec{l}_{sol}$ yönü $\hat{\rho}$ alınır, zıt işaretlisi alınmaz. Onu zıt işaretli yapacak olan, integralin $\rho = 2$ 'den 1 'e alınmasıdır. Benzer şekilde $d\vec{l}_{alt}$ yönü $\hat{\phi}$ alınır, zıt işaretlisi alınmaz. Onu zıt işaretli yapacak olan, integralin $\varphi = \pi/2$ 'den $\pi/3$ 'e alınmasıdır.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\varphi=\pi/2}^{\pi/3} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{alt} + \int_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{ust}$$

Çünkü $\vec{A}$ sadece $\hat{\phi}$ bileşenli, ve $d\vec{l}_{sol}$ ile $d\vec{l}_{sag}$ ise $\hat{\phi}$ bileşeni içermediği için, sol ve sağ kenarlarda $\vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ 'dır. Alt kenarda $\rho = 1$, üst kenarda ise $\rho = 2$ alınmalıdır.

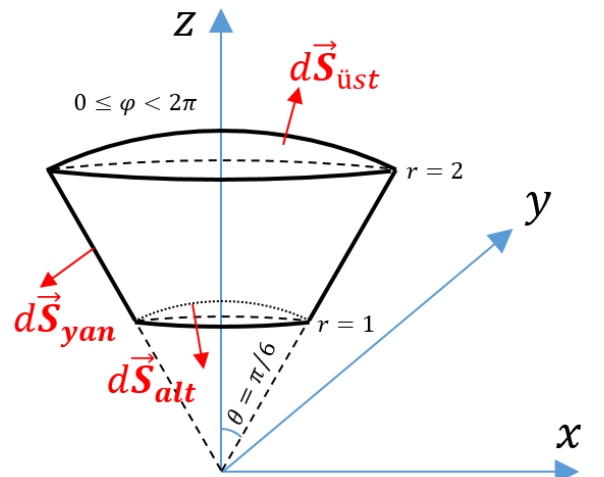
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\varphi=\pi/2}^{\pi/3} \underbrace{[\rho^3 - 2\rho^2]_{\rho=1}}_{-1} d\varphi + \int_{\varphi=\pi/3}^{\pi/2} \underbrace{[\rho^3 - 2\rho^2]_{\rho=2}}_0 d\varphi = [-\varphi]_{\pi/2}^{\pi/3} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\pi}{6} \quad \checkmark$$

Soru 3.5) Küresel koordinatlarda verilen $\vec{A} = kr \sin \theta \cos \varphi \hat{\phi}$ vektör alanının $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$ bölgeleri arasında kalan hacimsel V bölgesi, ve onun sınır yüzeyi S üzerinde diverjans teoremini sağladığını doğrulayınız.

Çözüm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} kr \sin \theta (-\sin \varphi) = -k \sin \varphi$$



$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/6} \int_{r=1}^2 \underbrace{-k \sin \varphi r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr}_{dV}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/6} -k \underbrace{\left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^2}_{7/3} \sin \varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{+7k}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \varphi \underbrace{[\cos \theta]_{\theta=0}^{\pi/6}}_{\sqrt{3}/2-1} d\varphi = \frac{7k(1-\sqrt{3}/2)}{3} \underbrace{[\cos \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}}_{1-1=0}$$

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = 0}$$

bulunur. Yüzeysel integral alırken şekilde alt yüzün düzlem değil küresel oyuk olduğuna, üst yüzün de küresel tümsek olduğuna dikkat ediniz. Alt ve üst bölgelerin diferansiyel yüzey vektörleri bulunurken, sonsuz küçük dikdörtgen kenarlarından birinin $r d\theta$, diğerinin ise $r \sin \theta d\varphi$ olduğuna dikkat ediniz. Bu dikdörtgenleri daha iyi anlamak için, yeryüzünde ikişer meridyen ve ikişer paralel daireleri arasında kalan küçük bir dikdörtgeni düşününüz. Meridyenler üzerindeki yay uzunlukları dünyanın yarıçapıyla hesaplanırken, paralel dairesi üzerindeki kenarlar o paralel dairesinin yarıçapıyla (burada $r \sin \theta$ 'ya benzeyenle) hesaplanır.

$$d\vec{S}_{\text{alt}} = \underbrace{r}_{1} d\theta \underbrace{r}_{1} \sin \theta d\varphi (-\hat{r}) = -\sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

$$d\vec{S}_{\text{üst}} = \underbrace{r}_{2} d\theta \underbrace{r}_{2} \sin \theta d\varphi \hat{r} = 4 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

$$d\vec{S}_{\text{yan}} = \underbrace{r}_{2} \sin \theta d\varphi dr \hat{\theta} = 2 \sin \theta d\varphi dr \hat{\theta}$$

$\vec{A}$ 'nın yalnız $\hat{\varphi}$ bileşeni olduğundan ve hiç bir $d\vec{S}$ vektörünün $\hat{\varphi}$ bileşeni olmadığından

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{alt}} \underbrace{\vec{A} \cdot d\vec{S}_{\text{alt}}}_0 + \int_{\text{üst}} \underbrace{\vec{A} \cdot d\vec{S}_{\text{arka}}}_0 + \int_{\text{yan}} \underbrace{\vec{A} \cdot d\vec{S}_{\text{arka}}}_0 = \boxed{0 = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}} \quad \checkmark$$

Aslında $\vec{A}$ 'nın yalnız $\hat{\varphi}$ bileşeni olmasını şekil üzerinde akı çizgilerini düşünerek yorumlarsak, hiçbir yerde şekilden dışarı veya içeri doğru akı olmadığı anlaşılabilir.

Soru 3.6) Soru 3.5'te verilen vektör alanın, verilen şeklin üst yüzeyinde Stoke teoremini sağladığını doğrulayınız.

Çözüm: $\vec{A} = kr \sin \theta \cos \varphi \hat{\varphi}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_\rho & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial(kr \sin^2 \theta \cos \varphi)}{\partial \theta}}_{2kr \sin \theta \cos \theta \cos \varphi} \hat{r} - \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial(kr^2 \sin \theta \cos \varphi)}{\partial r}}_{2kr \sin \theta \cos \varphi} \hat{\theta} = 2k \cos \theta \cos \varphi \hat{r} - 2k \sin \theta \cos \varphi \hat{\theta} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \frac{d\vec{S}_{\text{üst}}}{4 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/6} \frac{2k \cos \theta \cos \varphi}{4k \sin^2 \theta \cos \varphi} 4 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} -2k \underbrace{[\cos 2\theta]_0^{\pi/6}}_{-1/2} \cos \varphi d\varphi$$

$$= [k \sin \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 0 = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_{\text{üst}}$$

c eğrisini, $r = 2$ ve $\theta = \pi/6$ ile tanımlı çember seçersek (bu iki verinin bir çember tanımladığını görünüz), sağ el kuralına göre başparmağımız $d\vec{S}_{\text{üst}}$ yönünde olacak şekilde c eğrisini kavrayarak

$$d\vec{l} = \underbrace{r}_{2 \sin(\pi/6)} \underbrace{\sin \theta}_{1} d\varphi \hat{\varphi} = d\varphi \hat{\varphi}$$

buluruz. $\vec{A} = k \underbrace{r}_{2 \sin(\pi/6)} \underbrace{\sin \theta}_{1} \cos \varphi \hat{\varphi} = k \cos \varphi \hat{\varphi}$ olduğundan,

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_0^{2\pi} = 0 = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \checkmark$$

Soru 4.1) $Q > 0$ olmak üzere, boş uzayda yandaki şekildeki gibi yerleştirilmiş üç yükün, $N(2b, b, b)$ noktasında meydana getirdiği elektrik alan vektörünü ($\vec{E}$) bulunuz.

Çözüm: x, y, z eksenleri üzerindeki yüklerin konum vektörleri sırasıyla

$$\vec{r}_x = 2b\hat{x}, \quad \vec{r}_y = b\hat{y}, \quad \vec{r}_z = b\hat{z}$$

N noktasının konum vektörü,

$$\vec{r}_N = 2b\hat{x} + b\hat{y} + b\hat{z}$$

Buna göre mesafe vektörleri ve büyüklükleri sırasıyla

$$\vec{r}_N - \vec{r}_x = b\hat{y} + b\hat{z} \rightarrow |\vec{r}_N - \vec{r}_x| = b\sqrt{2}$$

$$\vec{r}_N - \vec{r}_y = 2b\hat{x} + b\hat{z} \rightarrow |\vec{r}_N - \vec{r}_y| = b\sqrt{5} \quad \text{ve}$$

$$\vec{r}_N - \vec{r}_z = 2b\hat{x} + b\hat{y} \rightarrow |\vec{r}_N - \vec{r}_z| = b\sqrt{5}$$

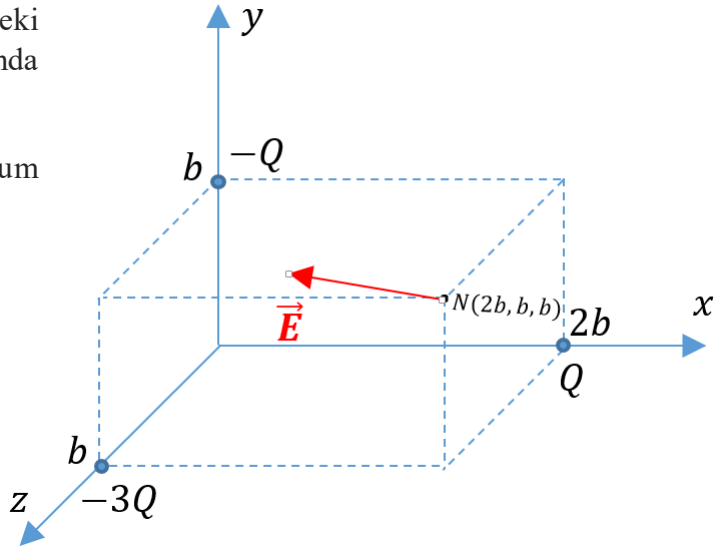
Coulomb yasasının ayırık yükler için uygulanmasıyla bileşke elektrik alan şöyle bulunur:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q(\vec{r}_N - \vec{r}_x)}{|\vec{r}_N - \vec{r}_x|^3} + \frac{-Q(\vec{r}_N - \vec{r}_y)}{|\vec{r}_N - \vec{r}_y|^3} + \frac{-3Q(\vec{r}_N - \vec{r}_z)}{|\vec{r}_N - \vec{r}_z|^3} \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{b\hat{y} + b\hat{z}}{(b\sqrt{2})^3} - \frac{2b\hat{x} + b\hat{z}}{(b\sqrt{5})^3} - 3 \frac{2b\hat{x} + b\hat{y}}{(b\sqrt{5})^3} \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left\{ \frac{\hat{y} + \hat{z}}{2^{3/2}} - \frac{2\hat{x} + \hat{z}}{5^{3/2}} - 3 \frac{2\hat{x} + \hat{y}}{5^{3/2}} \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left\{ \underbrace{-8 \cdot 5^{-3/2}}_{-0,7155} \hat{x} + \underbrace{(2^{-3/2} - 3 \cdot 5^{-3/2})}_{0,0852} \hat{y} + \underbrace{(2^{-3/2} - 5^{-3/2})}_{0,2641} \hat{z} \right\}$$

Soru 4.2) Önceki soruda $Q = 3 \times 10^{-6}$ C, $b = 25$ cm ise ve $N(2b, b, b)$ noktasına $Q' = 4 \times 10^{-6}$ C yük yerleştirilirse, Q' üzerindeki kuvvet vektörü ve büyüklüğü ne olur? $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m



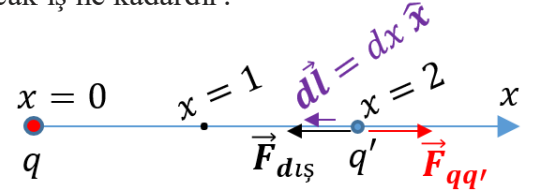
Çözüm: Kuvvet $\vec{F} = Q'\vec{E} = \vec{E} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 b^2} (-0,7155 \hat{x} + 0,0852 \hat{y} + 0,2641 \hat{z})$

$$= \frac{(3 \times 10^{-6} \text{ C})(4 \times 10^{-6} \text{ C})}{4\pi(8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m})(0,25 \text{ m})^2} (-0,7155 \hat{x} + 0,0852 \hat{y} + 0,2641 \hat{z})$$

$$\boxed{\vec{F} = (-1,235 \hat{x} + 0,147 \hat{y} + 0,456 \hat{z}) \text{ N}} \rightarrow F = \sqrt{1,235^2 + 0,147^2 + 0,456^2} \text{ N} = \boxed{F = 1,324 \text{ N}}$$

Soru 4.3) Boşlukta orijinde sabit tutulan $q = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$ yükünün 2 m uzağındaki $q' = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$ yükünü, orijine 1 m mesafeye, sabit hızla getirmek için q' yükü üzerinde yapılacak iş ne kadardır?

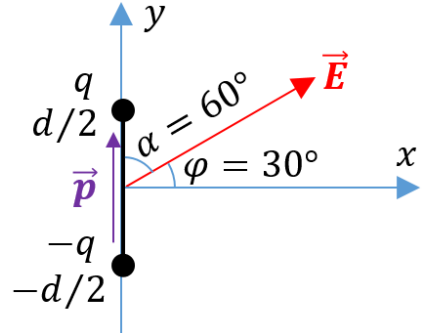
Çözüm: İlgili tüm noktaların x ekseninde olduğunu düşünelim. Zaten ortamda başka yük olmadığı için hangi yönden yaklaşıldığı, iş miktarını etkilemez. İş yapan dış kuvvet, q tarafından q' yüküne uygulanan kuvvetin zıt işaretlisi olmalıdır (hızı değiştirilmediği için). İş (W) integralini $x = 2$ 'den $x = 1$ 'e alırsak diferansiyel yol vektörü her ne kadar sola yönelmiş de olsa $d\vec{l} = dx\hat{x}$ alınmalıdır.



$$\vec{F}_{dış} = -\vec{F}_{qq'} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{x} \rightarrow W = \int_{x=2\text{m}}^{1\text{m}} \vec{F}_{dış} \cdot d\vec{l} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{x=2\text{m}}^{1\text{m}} \frac{dx}{x^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} \right]_{2\text{m}}^1 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1\text{m}} - \frac{1}{2\text{m}} \right)$$

$$W = \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{4\pi(8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m})} \cdot \frac{1}{2 \text{ m}} = \boxed{W = 0,0449 \text{ J}}$$

Soru 4.4) y eksenine yerleştirilmiş, $d = 10 \text{ cm}$ uzunluğunda bir çubuğun üst ucunda $q = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$, alt ucunda $-q$ yükleri bulunmaktadır. Çubuğun tamamı üzerinde, xy düzleminde $+x$ eksenine ile $\varphi = 30^\circ$ açılı $E = 0,22 \text{ V/m}$ şiddetinde bir elektrik alan vardır. Çubuk üzerindeki torku hesaplayınız.



Çözüm: Elektrik dipol moment vektörü $\vec{p} = qd\hat{y}$, $\vec{E} = E \cos \varphi \hat{x} + E \sin \varphi \hat{y}$ ve tork $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} = pE \sin \alpha (-\hat{z})$

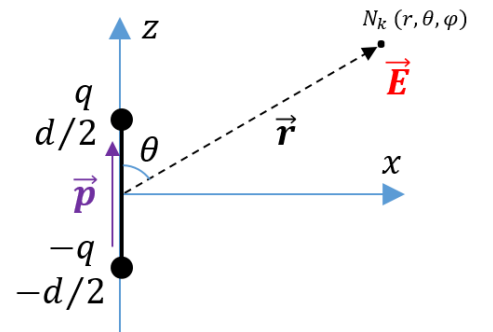
$$\vec{T} = -(5 \times 10^{-6} \text{ C})(0,10 \text{ m})(0,22 \text{ V/m}) \sin 60^\circ \hat{z} = \boxed{(-9,53 \times 10^{-8} \text{ Nm})\hat{z} = \vec{T}}$$

Yani tork, çubuğu şekle göre saat yönünde döndürmeye çalışmaktadır.

Soru 4.5) z eksenine orijini ortalayarak yerleştirilmiş $\vec{p} = qd\hat{z}$ elektrik dipolünün, $r \gg d$ noktalarında oluşturduğu elektrik alan, küresel koordinatlarda şöyle bulunmuştur:

$$\vec{E} \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Bu elektrik alanın a) solenoid b) irrotasyonel (korunumlu) olduğunu gösteriniz. (Çözüm size bırakıldı.)



Soru 4.6) y eksenine boyunca, bir ucu orijinde olan b uzunluğunda ince bir çubuk üzerinde Q elektrik yükü düzgün dağılmıştır. Bu çubuğun, x ekseninde $x = a$ noktasında oluşturduğu elektrik alan vektörünü bulunuz.

Çözüm: Çizgisel yük yoğunluğu $dq/dy = \rho_l = Q/b$

Çubuğun orijinden y uzaklıktaki sonsuz küçük parçasının yükü, sorulan noktaya uzaklığı ve o parça için β açısı sırasıyla:

$$dq = \rho_l dy, \quad r = \sqrt{a^2 + y^2}, \quad \beta = \tan^{-1}(y/a)$$

Bu parçanın o noktadaki elektrik alana sonsuz küçük katkısı, xy düzleminde $\varphi = -\alpha$ yönünde, büyüklüğü ise

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dy}{a^2 + y^2}$$

x ve y bileşenleri ise sırasıyla

$$dE_x = dE \cos \beta, \quad dE_y = -dE \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \quad \sin \beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Buna göre E_x ve E_y değerlerini $y = 0$ 'dan b 'ye integrale buluruz:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \int_{y=0}^b \frac{ady}{(a^2 + y^2)^{3/2}}, \quad E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \int_{y=0}^b \frac{ydy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Her iki integralde de $y = a \tan \beta$ dönüşümü yapabiliriz ve buradaki β gerçekten de şekilde gösterilen β olur.

$$a^2 + y^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta}, \quad dy = \frac{a}{\cos^2 \beta} d\beta \quad \text{ve} \quad \int_{y=0}^b \rightarrow \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(b/a)}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(b/a)} \frac{a^2/\cos^2 \beta}{a^3/\cos^3 \beta} d\beta, \quad E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(b/a)} \frac{a^2 \tan \beta / \cos^2 \beta}{a^3/\cos^3 \beta} d\beta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(b/a)} \cos \beta d\beta, \quad E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(b/a)} \sin \beta d\beta$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} [\sin \beta]_0^{\tan^{-1}(b/a)}, \quad E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} [-\cos \beta]_0^{\tan^{-1}(b/a)}$$

Üst sınırlarda

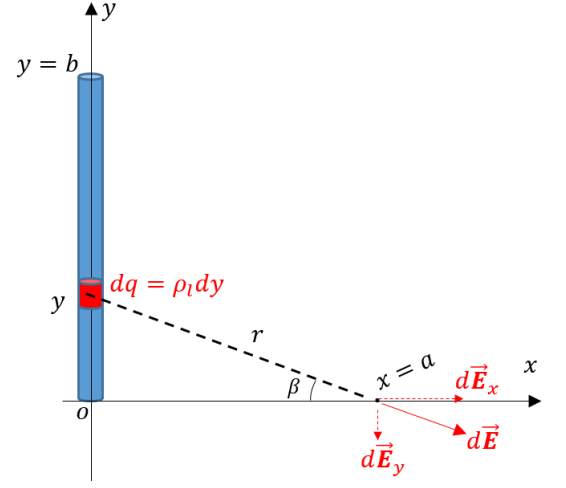
$$\sin(\tan^{-1}(b/a)) = \sin \beta_{\max} = b/r_{\max} = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos(\tan^{-1}(b/a)) = \cos \beta_{\max} = a/r_{\max} = a/\sqrt{a^2 + b^2}$$

olduğundan,

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

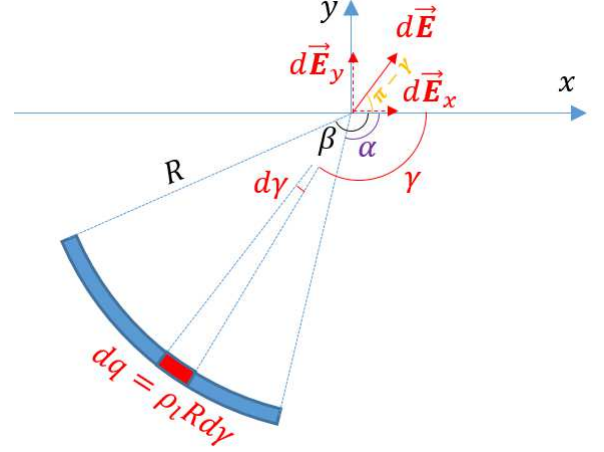
$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ba} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \hat{y}}$$



Soru 4.7) Benzer soruyu çubuğun y ekseninde orijini ortalayarak konumlandırıldığı durum için hesaplayınız.

Çözüm size bırakıldı. Cevap: $E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b/2)^2}}$ ve simetriden dolayı $E_y = 0$.

Soru 4.8) xy düzleminde orijin merkezli, $+x$ eksenine bir ucu α bir ucu β açılarıyla aşağıda konumlanmış ($\beta - \alpha$ yay açılı), R yarıçaplı ince bir çember parçası üzerindeki toplam yük Q olduğuna göre, bu parçanın orijinde meydana getirdiği elektrik alan vektörünü ($\vec{E}$) bulunuz.



Çözüm: Çizgisel yük yoğunluğu $\rho_l = \frac{Q}{R(\beta - \alpha)}$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_l R d\gamma}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

x ve y bileşenleri ise sırasıyla

$$dE_x = dE \cos(\pi - \gamma) = -dE \cos \gamma, \quad dE_y = dE \sin(\pi - \gamma) = dE \sin \gamma$$

Dikkat, şekle göre α ile β açıları 90° 'den büyük olduğu için, bu sınırlar arasındaki γ için $-\cos \gamma > 0$ olur.

$$E_x = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\gamma=\alpha}^{\beta} -\cos \gamma d\gamma, \quad E_y = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\gamma=\alpha}^{\beta} \sin \gamma d\gamma$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} [-\sin \gamma]_{\alpha}^{\beta}, \quad E_y = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} [-\cos \gamma]_{\alpha}^{\beta}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \alpha - \sin \beta), \quad E_y = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2 (\beta - \alpha)} \{ (\sin \alpha - \sin \beta) \hat{x} + (\cos \alpha - \cos \beta) \hat{y} \}$$

Soru 4.9) xy düzleminde yüzeysel yük yoğunluğu sabit $\rho_s = \sigma$ ise, bu düzlemsel yük dağılımının z ekseninde meydana getirdiği elektrik alan şiddetini bulunuz. (ρ_s ile ρ 'yu karıştırmayalım. Bu yüzden ρ_s sembolü yerine σ karşılığını yazalım ve silindirik koordinatları kullanalım.)

$$dE = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \rho d\phi d\rho}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + \rho^2)}$$

Her yönden bileşke, simetri nedeniyle sadece $\hat{z}$ bileşeni bulunur.

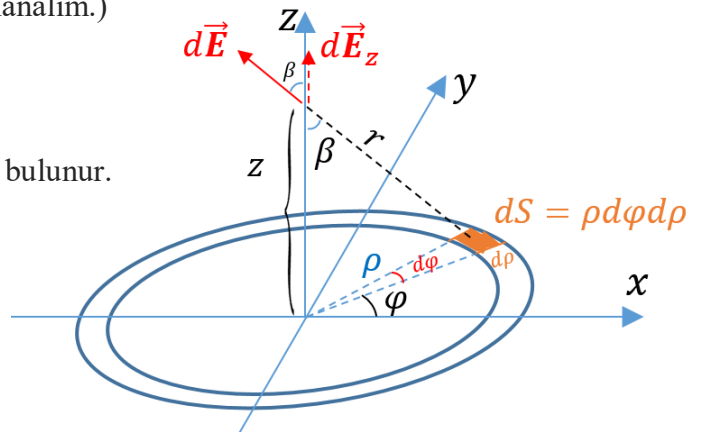
$$z > 0 \Rightarrow dE_z = dE \cos \beta = \frac{\sigma \rho d\phi d\rho}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + \rho^2)} \cos \beta$$

$$\rho = z \tan \beta \rightarrow d\rho = z \sec^2 \beta d\beta$$

$$r^2 = z^2 + \rho^2 = z^2 \sec^2 \beta$$

$$E_z = \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma z \tan \beta d\phi z \sec^2 \beta d\beta}{4\pi\epsilon_0 z^2 \sec^2 \beta} \cos \beta = \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \beta d\phi d\beta$$

$$E_z = \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \beta \left[\frac{\phi}{2\pi} \right]_0^{2\pi} d\beta = \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \beta d\beta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \beta]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Bu $z > 0$ için bulundu. $z < 0$ bölgesinde elektrik alanın tersi yönde, yani aşağı doğru bulunacağı açıktır.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > 0 \text{ ise} \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (\text{yalnız } z \text{ ekseninde})$$

Bu soru Gauss yöntemiyle çok daha kolay yapılabilir. Derste anlatılmıştır. Sabit yüzeysel yoğunluklu, her yönden sonsuz genişlikte düzlemsel yük dağılımının oluşturduğu elektrik alan, düzlemden uzaklığa göre değişmemektedir.

Soru 4.10) Soru 4.9'daki yüzeysel yük yoğunluğu sabit değil de $\rho_s = \frac{\sigma b}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}$ olsaydı, z ekseninde sadece $z = b$ noktasındaki elektrik alan ne olurdu?

Çözüm: Benzer işlemlerle ve $z = b$ yerine yazılarak, $\frac{b}{\sqrt{b^2 + \rho^2}} = \cos \beta$ bulunurdu. Böylece integral öncesi

$$E_z = \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\sigma \cos \beta}{4\pi\epsilon_0} \sin \beta \, d\varphi \, d\beta$$

ve yine benzer işlemlerle φ 'ye göre integral alındıktan sonra şöyle bulunurdu:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \underbrace{\sin \beta}_{u \text{ olsun}} \underbrace{\cos \beta \, d\beta}_{du \text{ olur}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \underbrace{\left[\frac{\sin^2 \beta}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{1/2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{z} \quad (\text{yalnız } x = 0, y = 0, z = b \text{ noktasında})$$

Soru 4.11) Orijin merkezli, içi oyuk bir kürenin hacimsel yük dağılımı şöyledir:

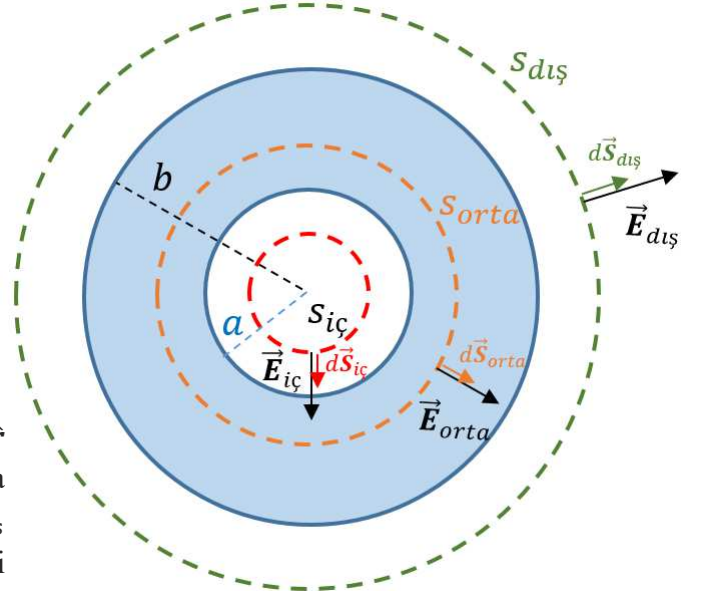
$$\rho_V = \begin{cases} 0 & r < a \text{ ise} \\ cr & a \leq r \leq b \text{ ise} \\ 0 & r > b \text{ ise} \end{cases}$$

Bu kürenin, içte (oyukta), ortada ve dışta meydana getirdiği elektrik alanları Gauss yöntemiyle ayrı ayrı bulunuz.

Çözüm: Simetriden dolayı şekildeki tüm vektörler $\hat{r}$ yönündedir. Bu yüzden vektörel çarpımlar skaler çarpıma eşit olur. Gauss yüzeyi olarak alınan $S_{iç}$, S_{orta} , ve $S_{dış}$ küresel kabuklarının yarıçapları r değişkeni olsun. Belirli bir r için elektrik alan vektörü, simetriden dolayı sabittir.

$r < a$ için: $Q_{iç} = 0$

$$\frac{Q_{iç}}{\epsilon_0} = 0 = \oint_{S_{iç}} \vec{E}_{iç} \cdot d\vec{S}_{iç} = \oint_{S_{iç}} \underbrace{E_{iç}}_{\text{sabit}} dS_{iç} = E_{iç} \oint_{S_{iç}} dS_{iç} = E_{iç} 4\pi r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_{iç} = 0$$



$a \leq r \leq b$ için: Belirli bir r yarıçaplı küre içinde kalan elektrik yükü r 'nin bir fonksiyonudur. Bunu r yarıçaplı dr kalınlığında küresel kabuk üzerindeki sonsuz küçük yükün belirsiz integralini alarak bulalım.

$$Q_{orta}(r) = \int_{cr} \rho_V 4\pi r^2 dr = \int 4\pi c r^3 dr = \pi c r^4 + \text{integral sabiti}$$

$r = a$ 'da $Q_{orta}(a) = 0$ olduğundan, integral sabiti $= -\pi c a^4$ bulunur. $Q_{orta}(r) = \pi c(r^4 - a^4)$

$$\frac{Q_{orta}(r)}{\epsilon_0} = \frac{\pi c(r^4 - a^4)}{\epsilon_0} = \oint_{S_{orta}} \vec{E}_{orta} \cdot d\vec{S}_{iç} = \oint_{S_{orta}} \underbrace{E_{orta}}_{\text{sabit}} dS_{orta} = E_{orta} \oint_{S_{iç}} dS_{orta} = E_{orta} 4\pi r^2$$

$$E_{orta} = \frac{c(r^4 - a^4)}{4\epsilon_0 r^2}$$

$r > b$ için: $Q_{dış} = \pi c(b^4 - a^4)$ (Dikkat, dışarıdaki yük değil, $S_{dış}$ küresel yüzeyi içindeki toplam yük)

$$\frac{Q_{dış}}{\epsilon_0} = \frac{\pi c(b^4 - a^4)}{\epsilon_0} = \oint_{S_{dış}} \vec{E}_{dış} \cdot d\vec{S}_{dış} = \oint_{S_{dış}} \underbrace{E_{dış}}_{\text{sabit}} dS_{dış} = E_{dış} \oint_{S_{dış}} dS_{dış} = E_{dış} 4\pi r^2$$

$$E_{dış} = \frac{c(b^4 - a^4)}{4\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < a \\ \frac{c(r^4 - a^4)}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} & a \leq r \leq b \\ \frac{c(b^4 - a^4)}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > b \end{cases}$$

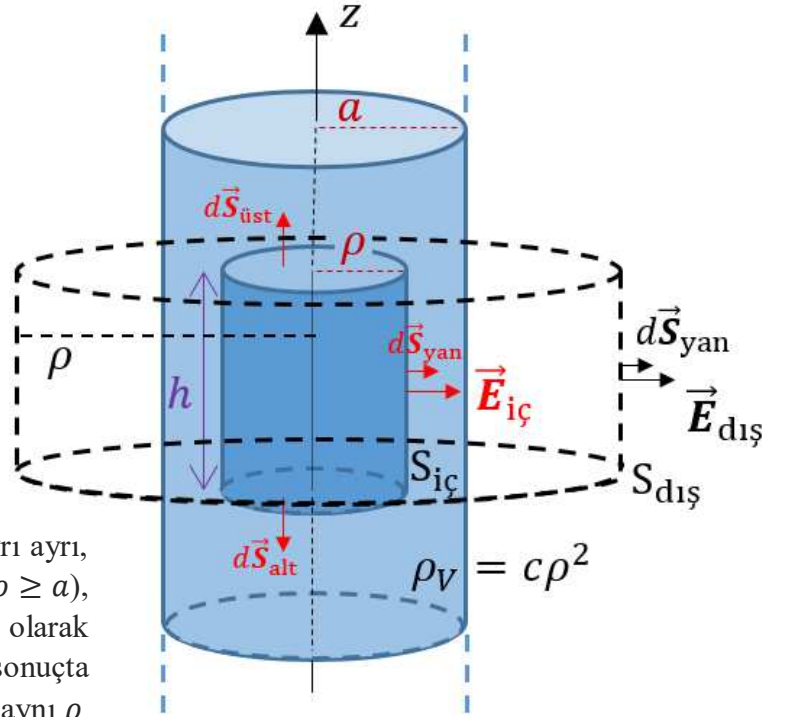
Soru 4.12) z eksenli ve her iki yönde $\mp$ sonsuza kadar uzanan a yarıçaplı silindirik bir bölgede hacimsel yük yoğunluğu değişken ve silindirik koordinatlarda $\rho_V = c\rho^2$ olduğuna göre, bu yük dağılımının oluşturduğu elektrik alanı, bölge içinde ve dışında ayrı ayrı bulunuz.

Çözüm: Gauss yasasını kullanalım. İçte ve dışta ayrı ayrı, eksen z eksenli olan, ρ yarıçaplı (içte $\rho < a$, dışta $\rho \geq a$), h yüksekliğinde silindir yüzeyini Gauss yüzeyi olarak seçelim (Belirli bir Gauss yüzeyi için ρ sabit, ama sonuçta değişkenimiz ρ olacağı için $S_{iç}$ ve $S_{dış}$ yarıçaplarını aynı ρ

sembolüyle gösterdik). $S_{iç}$ içindeki toplam yük, dV sonsuz küçük hacmini sonsuz küçük $d\rho$ kalınlığında ρ yarıçaplı bir silindir kabuğunun hacmi olarak belirsiz integrale bulalım ve integral sabitini belirleyelim:

$$Q_{iç} = \int \rho_V dV = \int \underbrace{\rho_V}_{\frac{c\rho^2}{dV \text{ yerine}}} \underbrace{h 2\pi \rho d\rho}_{dV \text{ yerine}} = 2\pi h c \int \rho^3 d\rho = \frac{\pi h c}{2} \rho^4 + \text{integral sabiti}$$

Silindir $\rho = 0$ yarıçaplı olursa içindeki toplam yük sıfır olacağından, yukarıdaki integral sabiti de sıfır olur.



$$\frac{Q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\pi h c}{2 \epsilon_0} \rho^4 = \oint_{S_{iç}} \vec{E}_{iç} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{üst}} \underbrace{\vec{E}_{iç} \cdot d\vec{S}_{\text{üst}}}_0 + \int_{\text{alt}} \underbrace{\vec{E}_{iç} \cdot d\vec{S}_{\text{alt}}}_0 + \int_{\text{yan}} \underbrace{\vec{E}_{iç} \cdot d\vec{S}_{\text{yan}}}_{E_{iç} dS_{\text{yan}}}$$

olur, çünkü simetriden dolayı elektrik alanın $\hat{\phi}$ ve $\hat{z}$ bileşenleri olamaz, sadece $\hat{\rho}$ bileşeni olabilir, o da $d\vec{S}_{\text{üst}}$ ve $d\vec{S}_{\text{alt}}$ vektörlerine dik, $d\vec{S}_{\text{yan}}$ vektörüne paraleldir. Ayrıca yine simetriden dolayı yan yüz boyunca $E_{iç}$ büyüklüğü de sabittir. Dolayısıyla,

$$\frac{\pi h c}{2 \epsilon_0} \rho^4 = E_{iç} \int_{\text{yan}} dS_{\text{yan}} = E_{iç} S_{\text{yan}} = E_{iç} 2\pi \rho h \rightarrow \boxed{E_{iç} = \frac{c}{4 \epsilon_0} \rho^3}$$

$S_{\text{dış}}$ içindeki toplam yük ise $Q_{iç} = \frac{\pi h c}{2} \rho^4$ formülünde $\rho = a$ konularak bulunur, çünkü $\rho > a$ bölgesinde yük yoğunluğu sıfır olup Gauss yüzeyi silindir içindeki toplam yüke ekleme olmaz. Elektrik alan dışarıda da simetriden dolayı yalnızca $\hat{\rho}$ bileşenlidir, ve $d\vec{S}$ vektörleri de $S_{iç}$ yüzeyi üzerindeki benzer yönlü olduğundan:

$$\frac{\pi h c}{2 \epsilon_0} a^4 = \oint_{S_{\text{dış}}} \vec{E}_{\text{dış}} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{üst}} \underbrace{\vec{E}_{\text{dış}} \cdot d\vec{S}_{\text{üst}}}_0 + \int_{\text{alt}} \underbrace{\vec{E}_{\text{dış}} \cdot d\vec{S}_{\text{alt}}}_0 + \int_{\text{yan}} \underbrace{\vec{E}_{\text{dış}} \cdot d\vec{S}_{\text{yan}}}_{E_{\text{dış}} dS_{\text{yan}}}$$

Yine simetriden dolayı yan yüz boyunca $E_{\text{dış}}$ büyüklüğü de sabittir. Dolayısıyla,

$$\frac{\pi h c a^4}{2 \epsilon_0} = E_{\text{dış}} \int_{\text{yan}} dS_{\text{yan}} = E_{\text{dış}} S_{\text{yan}} = E_{\text{dış}} 2\pi \rho h \rightarrow \boxed{E_{\text{dış}} = \frac{c a^4}{4 \epsilon_0 \rho}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{c}{4 \epsilon_0} \rho^3 \hat{\rho} & \rho \leq a \\ \frac{c a^4}{4 \epsilon_0 \rho} \hat{\rho} & \rho > a \end{cases}}$$

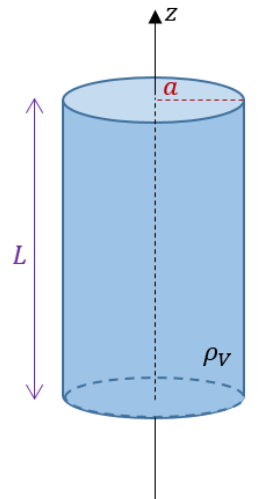
Dikkat: $\rho > a$ bölgesinden bakıldığında, birim uzunluktaki yük $\lambda = \frac{\pi h c}{2} a^4 \cdot \frac{1}{h} = \frac{\pi c}{2} a^4$ = çizgisel yük yoğunluğu gibi düşünülürse,

$$E_{\text{dış}} = \frac{c a^4}{4 \epsilon_0 \rho} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \rho}$$

bulunur ki bu derste bulunan sonsuz uzunlukta, sabit çizgisel yük yoğunluğundaki düz çubuğun, ρ uzaklıkta meydana getirdiği elektrik alan şiddeti ile aynıdır.

Soru 4.13) L uzunluğunda, a yarıçaplı bir silindirin tabanı $z = 0$ düzleminde ve eksenini z eksenine ile çakışık olup, hacimsel yük yoğunluğu ρ_v sabittir. Bu silindirin, içte ve dışta meydana getirdiği elektrik alanı, yalnızca z ekseninde bulunuz.

Çözüm: Silindirin sonsuz küçük dh kalınlığında bir katmanının, ρ yarıçaplı ve $d\rho$ kalınlığında bir halkasının, ϕ açısal konumunda $d\phi$ yayı kadarlık bir parçasının, katman ortasından b yüksekliğinde bir noktada meydana getirdiği elektrik alanın $\hat{z}$ bileşenini bulalım. Çünkü simetriden dolayı bileşke yalnız $\hat{z}$ yönünde olacaktır. (Bir sonraki şekil, ϕ açısının daha kolay yorumlanabilmesi için $z = 0$ 'daki katman için çizilmiştir.)



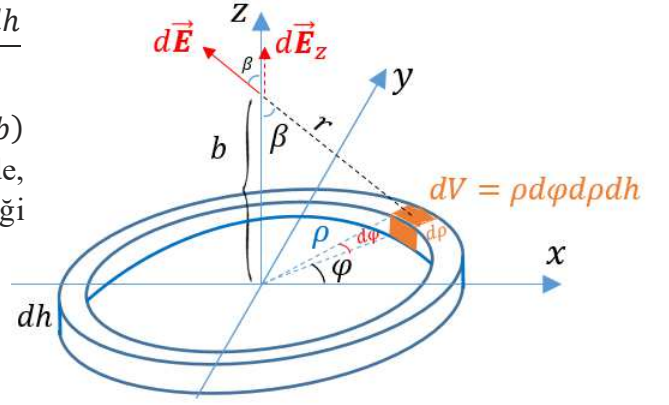
$$dE_z = \frac{\rho_v dV}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos \beta = \frac{\rho_v \rho d\phi \rho dh}{4 \pi \epsilon_0 (b^2 + \rho^2)} \cos \beta$$

$\rho = b \tan \beta$ olduğundan, $d\rho = b \sec^2 \beta d\beta$ ve $b^2 + \rho^2 = b^2 \sec^2 \beta$

$$dE_z = \frac{\rho_V b \tan \beta d\varphi b \sec^2 \beta d\beta dh}{4\pi\epsilon_0 b^2 \sec^2 \beta} \cos \beta = \frac{\rho_V \sin \beta d\varphi d\beta dh}{4\pi\epsilon_0}$$

$\rho = 0$ ve $\rho = a$ sınırlarında sırasıyla $\beta = 0$ ve $\beta = \tan^{-1}(a/b)$ olacağından, $h < b$ kalınlığında bir silindirin, eksenini üzerinde, tabanından b kadar yüksekte bir noktada meydana getirdiği elektrik alan şiddeti

$$E = E_z = \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(a/b)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho_V \sin \beta d\varphi d\beta dh}{4\pi\epsilon_0}$$



Burada h 'a göre integrali belirsiz alacağız, çünkü zaten h yüksekliğine kadar silindir için integral alınıyor. (Aynı sembolü kullanmaya devam edeceğimiz için belirsiz integral tercih edildi.)

$$E = E_z = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(a/b)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \beta d\varphi d\beta dh = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(a/b)} \sin \beta d\beta dh$$

$$E = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(a/b)} \left[-\cos \beta \right]_0^{\tan^{-1}(a/b)} dh = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \int_{\beta=0}^{\tan^{-1}(a/b)} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) dh = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) h + \text{integral sabiti}$$

Burada $\cos(\tan^{-1}(a/b))$ hesabını, şekildeki β açısının $\rho = a$ durumundaki değeri olarak bulduk. $h = 0$ olsa, üretilen elektrik alan şiddeti de sıfır olacağından, yukarıdaki integral sabitinin sıfır olduğu anlaşılır.

$$E = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) h$$

Bu formül, z ekseninde bir $z \geq L$ noktası için kullanılırken, $h = L$ ve $b = z$ yazılarak kullanılabilir. Kolayca görülebileceği gibi

$$E = \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) L \quad (z \geq L)$$

Silindirin altında ($z < 0$) eksen üzerinde bir nokta için ise aynı formülde $-z$ 'yi $b - L$ yerine kullanarak, yani $b = L - z$ yazarak bulduğumuz sonucu ($-\hat{z}$) yönünde kullanırız.

$$E_z = -\frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + a^2}} \right) L \quad (z \leq 0)$$

(İşaretiyle aldığımız için E_z dedik, büyüklük anlamında E demedik.)

Ama silindir içinde ($0 \leq z \leq L$) eksen üzerinde bir nokta için, h 'a bağlı bulduğumuz formül ile önce z noktasının altında kalan parçasının elektrik alanını $b = h = z$ yazarak yukarı doğru ($\vec{E}_{\text{alt}}$), sonra z noktasının üstünde kalan parçasının elektrik alanını da $b = h = L - z$ yazarak aşağı doğru ($\vec{E}_{\text{üst}}$) bulur, alttakinin alanından üsttekini alanını çıkartarak hesaplayabiliriz. Sonuçta:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{L - z}{\sqrt{(L - z)^2 + a^2}} \right) L \hat{z} & z \leq 0 \text{ ise} \\ \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(\frac{(L - z)^2}{\sqrt{(L - z)^2 + a^2}} + 2z - L - \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} & 0 \leq z \leq L \text{ ise} \\ \frac{\rho_V}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) L \hat{z} & z \geq L \text{ ise} \end{cases}$$

