

ELEKTROMANYETİK ALAN TEORİSİ FİNAL/BÜTÜNLEME

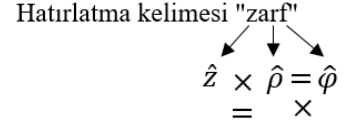
ÇALIŞMA SORULARI

Vize çalışma soruları tarzındaki sorular da final ve bütünleme kapsamındadır. Ancak sonraki konular daha ağırlıklı olur. Önceki konular, sonraki konularda kullanmak için de gereklidir.

Soru 0.1) (Vize kapsamında basit bir soru) Silindirik koordinatlarda verilen $\vec{E} = (5\hat{\rho} + 3\hat{\phi} - 2\hat{z})$ V/m elektrik alanının, $\vec{p} = 10^{-6} \cdot (-4\hat{\rho} + 7\hat{\phi} - 6\hat{z})$ C · m elektrik dipolü üzerinde oluşturduğu tork vektörünü ve büyüklüğünü bulunuz.

Çözüm: $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} = 10^{-6} \cdot (-4\hat{\rho} + 7\hat{\phi} - 6\hat{z}) \times (5\hat{\rho} + 3\hat{\phi} - 2\hat{z})$ N · m

Hatırlatma kelimesi gerekirse yan yana tekrar yazılarak vektörel çarpılan harfler yan yana aynı sırayla bulunursa diğer harften, tersi sırayla bulunursa diğer harfin zıt işaretlisinden çarpım sonucu vektör hatırlanır ("zarf"ın "a"sı yok sayılır). Aynı harfli iseler çarpımları sıfırdır.



$$\vec{T} = 10^{-6} \cdot \left(-12 \underbrace{\hat{\rho} \times \hat{\phi}}_{\hat{z}} + 8 \underbrace{\hat{\rho} \times \hat{z}}_{-\hat{\phi}} + 35 \underbrace{\hat{\phi} \times \hat{\rho}}_{-\hat{z}} - 14 \underbrace{\hat{\phi} \times \hat{z}}_{\hat{\rho}} - 30 \underbrace{\hat{z} \times \hat{\rho}}_{\hat{\phi}} - 18 \underbrace{\hat{z} \times \hat{\phi}}_{-\hat{\rho}} \right) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{T} = (4\hat{\rho} - 38\hat{\phi} - 47\hat{z}) \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \rightarrow \quad 10^{-6} \cdot \sqrt{4^2 + 38^2 + 47^2} \text{ N} \cdot \text{m} = T = 6,06 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

(Benzer şekilde Kartezyen ve küresel koordinatlarda da soru üretip çözünüz.)

Soru 0.2) $\epsilon = 5 \times 10^{-11}$ F/m dielektrik sabitine sahip bir ortamda, sabit bir $\vec{E} = (8\hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z})$ V/m elektrik alanının, yz düzlemi üzerinde 4 m²'lik bir yüzeyden, $-\hat{x}$ tarafına doğru geçirdiği deplasman akısı ne kadardır?

Çözüm: $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = 5 \times 10^{-11} \cdot (8\hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z})$ C · m⁻² = $10^{-11} \cdot (40\hat{x} - 15\hat{y} + 25\hat{z})$ C · m⁻²

S yüzeyi düzlem ve $\vec{D}$ düzlem üzerinde yere göre sabit ise, deplasman akısı integrali skaler çarpıma dönüşür:

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D} \cdot \vec{S}$$

yz düzleminin normali $\hat{x}$ doğrultusudur. Bunun eksi tarafına doğru akı sorulduğu için, $\vec{S} = -4\hat{x}$ m².

$$\Phi_D = \vec{D} \cdot \vec{S} = 10^{-11} \cdot (40\hat{x} - 15\hat{y} + 25\hat{z}) \cdot (-4\hat{x}) \text{ C} = -1,60 \times 10^{-9} \text{ C} = \boxed{\Phi_D = -1,60 \text{ nC}}$$

Dikkat: Deplasman akısı birimi yük birimi ile aynıdır. Sınavda ara işlemlerin her adımında birimleri göstermemek mazur görülebilir. Ancak sonuçta mutlaka doğru birim yazılmalıdır.

Soru 1.1) $a = 5$ V/m² ve $b = 3$ V/m² olmak üzere Kartezyen koordinatlarda verilen

$$\vec{E}(x, y, z) = ax\hat{x} + by\hat{y}$$

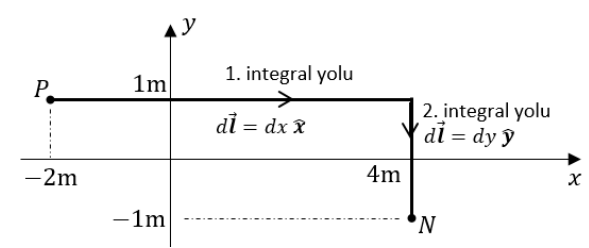
statik elektrik alanında, $P(x, y, z) = P(-2\text{m}, 1\text{m}, 0\text{m})$ noktasının, $N(x, y, z) = N(4\text{m}, -1\text{m}, 0\text{m})$ noktasına göre elektriksel potansiyelini (V_{PN}) bulunuz.

Çözüm: Genel olarak Kartezyen koordinatlarda $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ olsa da bu soruda $\hat{z}$ doğrultusunda gitmek gerekmediğinden gitmeyiz ve $\hat{z}$ bileşenini hesaba katmayız. Elektrik alandan potansiyel hesaplanan

integral sonucu, belirli iki nokta arasındaki yol seçiminden bağımsız olduğundan, eğer bu yolu, her bir aşamasında yalnız bir değişkenin değişip diğerlerinin sabit tutulduğu iki parça halinde seçersek, sabit tutulan değişkenlerin diferansiyelleri de sıfır olacağından, iki bağımsız integral elde ederiz:

$$V_{PN} = \int_P^N \vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{l} = \int_P^N (ax\hat{x} + by\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) = \int_{x=-2m}^{4m} ax dx + \int_{y=1m}^{-1m} by dy$$

$$V_{PN} = \left[\frac{1}{2} ax^2 \right]_{x=-2m}^{4m} + \left[\frac{1}{2} by^2 \right]_{y=1m}^{-1m}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left[\frac{4^2 - 2^2}{12} \right] + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left[\frac{(-1)^2 - 1^2}{0} \right] \right\} V = \boxed{V_{PN} = 30 V}$$


Soru 1.2) $a = 2 \text{ V/m}$ ve $b = 4 \text{ V/m}$ olmak üzere, silindirik koordinatlarda verilen

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = a\rho\hat{\rho} + b\frac{z}{\rho}\hat{\phi} + b\varphi\hat{z}$$

Statik elektrik alanında, $P_s(\rho, \varphi, z) = P_s(3m, \pi/4, 0m)$ noktasının, $N_s(\rho, \varphi, z) = N_s(5m, \pi/2, 1m)$ noktasına göre elektriksel potansiyelini (V_{PN}) bulunuz.

Çözüm: Genel olarak silindirik koordinatlarda yol vektörünün diferansiyeli: $d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\phi} + dz\hat{z}$

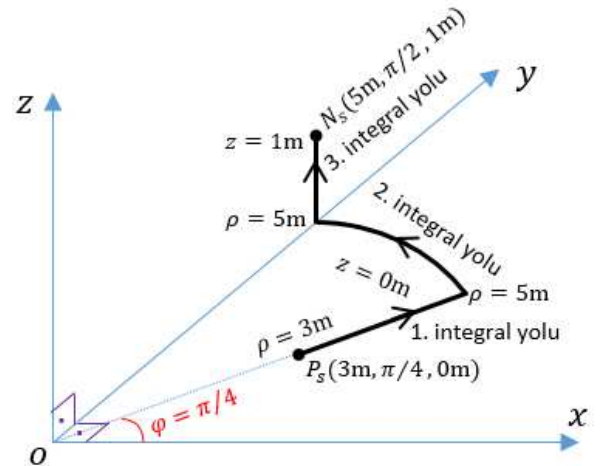
(Bu, $\rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ konum vektörünün t gibi başka bir değişkene göre türevinin dt ile çarpımıyla da bulunabilir,

$\hat{\rho} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ ve $\hat{z} = \frac{dz}{dt}\hat{z} + z\frac{d\hat{z}}{dt}$ bilgisini de kullanarak. Yani $d\vec{l} = \underbrace{\frac{d\rho}{dt}\hat{\rho}}_{\rho d\varphi\hat{\phi}} + \underbrace{\rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}}_{\rho d\varphi\hat{\phi}} + \underbrace{\frac{dz}{dt}\hat{z}}_{dz\hat{z}}$ şeklinde, yukarıdaki gibi

bulunur.) Gidilen yolda bazı bileşenlere göre değişim olmazsa o bileşen sıfır olur ve yazılmaz.

$$V_{PN} = \int_{P_s}^{N_s} \vec{E}(\rho, \varphi, z) \cdot d\vec{l} = \int_{P_s}^{N_s} \left(a\rho\hat{\rho} + b\frac{z}{\rho}\hat{\phi} + b\varphi\hat{z} \right) \cdot (d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\phi} + dz\hat{z}) = \int_{P_s}^{N_s} (ad\rho + bzd\varphi + b\varphi dz)$$

Elektrik alandan potansiyel hesaplanan integral sonucu, belirli iki nokta arasındaki yol seçiminden bağımsız olduğundan, eğer bu yolu, her bir aşamasında yalnız bir değişkenin değişip diğerlerinin sabit tutulduğu üç parça halinde seçersek, sabit tutulan değişkenlerin diferansiyelleri de sıfır olacağından, üç bağımsız integral elde ederiz:



$$V_{PN} = \int_{\rho=3m}^{5m} a d\rho + \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} bz d\varphi + \int_{z=0m}^{1m} b\varphi dz = [a\rho]_{\rho=3m}^{5m} + [bz\varphi]_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} + [b\varphi z]_{z=0m}^{1m}$$

Birinci integralde yer alsalardı $\varphi = \pi/4$ rad ve $z = 0m$ ilk değerlerini yerine yazardık, ama yoklar. İkinci integralde $z = 0m$ ilk değerinde sabit, ve olsaydı $\rho = 5m$ yeni değerinde sabit olurdu ama yok. Üçüncü integralde ise $\varphi = \pi/2$ rad yeni değerinde sabit yazılır; olsaydı $\rho = 5m$ yeni değeri de yerine yazılırdı, ama yok.

$$V_{PN} = \left\{ 2 \cdot (5 - 3) + 4 \cdot 0 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 0) \right\} V \rightarrow \boxed{V_{PN} = (4 + 2\pi)V = 10,28 V}$$

Soru 1.3) $b = 3 \text{ V/m}^2$ olmak üzere, küresel koordinatlarda verilen

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = 2br \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + br \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + br \cos \varphi \hat{\phi}$$

statik elektrik alanında, $P_k(r, \theta, \varphi) = P_k(2\text{m}, \pi/2, \pi/3)$ noktasının, $N_k(r, \theta, \varphi) = N_k(1\text{m}, \pi/2, 2\pi/3)$ noktasına göre elektriksel potansiyelini (V_{PN}) bulunuz.

Çözüm: Genel olarak küresel koordinatlarda yol vektörünün diferansiyeli: $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\phi}$

(Bu, $r \hat{r}$ konum vektörünün t gibi başka bir değişkene göre türevinin dt ile çarpımıyla da bulunabilir, $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} + (\sin \theta) \dot{\varphi} \hat{\phi}$ bilgisini de kullanarak. Yani $d\vec{l} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{dr}{dt} dt \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} dt = dr \hat{r} + \underbrace{r \dot{\theta} \hat{\theta} dt}_{r d\theta \hat{\theta}} + \underbrace{(r \sin \theta) \dot{\varphi} dt}_{r \sin \theta d\varphi \hat{\phi}}$ şeklinde,

yukarıdaki gibi bulunur.) Bazen bazı bileşenlere göre değişim olmadığından o bileşen sıfır olur ve yazılmaz.

Burada da ilk ve son θ değerleri aynı olduğu için $d\vec{l} = dr \hat{r} + r \sin \theta d\varphi \hat{\phi}$ yazmak yeterlidir.

$$V_{PN} = \int_{P_k}^{N_k} \vec{E}(r, \theta, \varphi) \cdot d\vec{l} = \int_{P_S}^{N_S} (2br \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + br \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + br \cos \varphi \hat{\phi}) \cdot (dr \hat{r} + r \sin \theta d\varphi \hat{\phi})$$

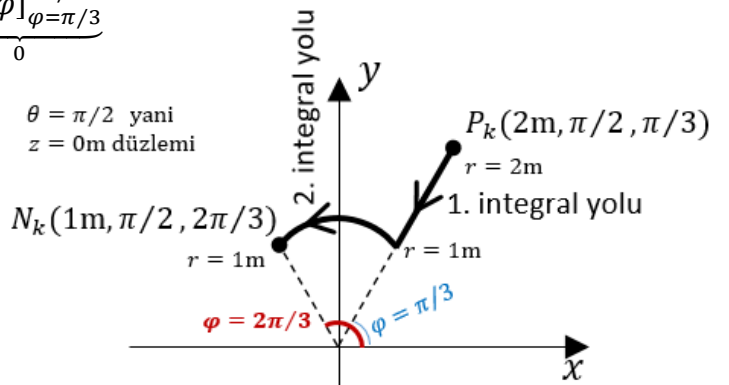
$$V_{PN} = \int_{P_S}^{N_S} (2br \sin \theta \sin \varphi dr + br^2 \sin \theta \cos \varphi d\varphi)$$

Burada da integral yolunu, önce yalnız r 'yi 2m'den 1m'ye değiştirirken $\varphi = \pi/3$ ilk değerinde sabit tutarak, sonra da $r = 1\text{m}$ son değerinde sabit tutarken φ 'yi $\pi/3$ 'ten $2\pi/3$ 'e değiştirerek seçelim. θ ise $\pi/2$ ilk ve son değerinde hep sabit tutulsun. Buna göre integral iki bağımsız parçanın toplamı olur:

$$V_{PN} = \int_{r=2\text{m}}^{1\text{m}} 2br \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin(\pi/2)} \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{\sin(\pi/3)} dr + \int_{\varphi=\pi/3}^{2\pi/3} b \underbrace{r^2}_{(1\text{m})^2} \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin(\pi/2)} \cdot \cos \varphi d\varphi$$

$$V_{PN} = (3 \text{ V/m}^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{[r^2]_{r=2\text{m}}^{1\text{m}}}_{-3\text{m}^2} + \underbrace{(3 \text{ V/m}^2)(1\text{m})^2}_{3\text{V}} \underbrace{[\sin \varphi]_{\varphi=\pi/3}^{2\pi/3}}_0$$

$$\boxed{V_{PN} = \frac{-9\sqrt{3}}{2} \text{ V}}$$



Soru 1.4) $E_0 = 5 \text{ V/m}$ olmak üzere, küresel koordinatlarda $2\text{m} < r < 5\text{m}$ bölgesi için verilen $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_0 \hat{r}$ statik elektrik alanında, $N_k(r, \theta, \varphi) = N_k(4\text{m}, \pi/6, \pi/4)$ noktasının elektriksel potansiyeli nedir?

Cevap: Elektriksel potansiyel daima iki nokta arasında fark olarak tanımlıdır. İfade kolaylığı amacıyla bir nokta potansiyelinden bahsedilen durumlarda bile, referans kabul edildiği bilinen bir noktaya göre fark kastedilir. Bu soruda bir referans noktası da verilmediği için tek nokta potansiyelinden hiçbir şekilde bahsedemeyiz.

(Verilen bu elektrik alanın geçerli olduğu bölgede, kendi seçeceğiniz çeşitli nokta çiftleri arasında potansiyel farklarını hesaplayınız.)

Soru 2.1) Kartezyen koordinatlarda verilen

$$V(x, y, z) = E_0 \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

elektiriksel potansiyel alanındaki elektrik alanı bulunuz. Burada E_0 , elektrik alan cinsinden bir sabittir.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z) &= -\vec{\nabla}V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= -E_0 \frac{yz(x^2 + y^2 + z^2) - xyz(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -E_0 \frac{yz(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -E_0 \frac{xz(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = -E_0 \frac{xy(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\boxed{\vec{E}(x, y, z) = \frac{-E_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} [yz(-x^2 + y^2 + z^2)\hat{x} + xz(x^2 - y^2 + z^2)\hat{y} + xy(x^2 + y^2 - z^2)\hat{z}]}$$

(Birim vektörleri yazmayı unutmayınız, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ gibi, kendi koordinat sisteminde. Eksi işaretini unutmayınız.)

Soru 2.2) Silindirik koordinatlarda verilen

$$V(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos^2 \varphi + z)E_0$$

elektiriksel potansiyel alanındaki elektrik alanı bulunuz. Burada E_0 , elektrik alan cinsinden bir sabittir.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\rho, \varphi, z) &= -\vec{\nabla}V(\rho, \varphi, z) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ -\frac{\partial V}{\partial \rho} &= -E_0 \cos^2 \varphi, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}E_0 \rho \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sin 2\varphi}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = -1\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}(\rho, \varphi, z) = (-\cos^2 \varphi \hat{\rho} + \sin 2\varphi \hat{\varphi} - 1\hat{z})E_0}$$

Soru 2.3) Küresel koordinatlarda verilen

$$V(r, \theta, \varphi) = (r \sin^2 \theta + r \cos \theta \sin \varphi)E_0$$

elektiriksel potansiyel alanındaki elektrik alanı bulunuz. Burada E_0 , elektrik alan cinsinden bir sabittir.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \theta, \varphi) &= -\vec{\nabla}V(r, \theta, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \\ -\frac{\partial V}{\partial r} &= -(\sin^2 \theta + \cos \theta \sin \varphi)E_0, \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\left(\frac{2r \sin \theta \cos \theta}{\sin 2\theta} - r \sin \theta \sin \varphi\right)E_0, \quad -\frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\cos \theta E_0\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_0 \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \cos \varphi$$

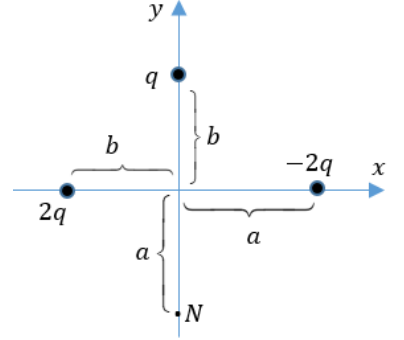
$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \left((-\sin^2 \theta - \cos \theta \sin \varphi) \hat{r} + (-\sin 2\theta + \sin \theta \sin \varphi) \hat{\theta} - \cot \theta \cos \varphi \hat{\varphi} \right) E_0$$

Soru 3.1) Şekildeki gibi xy düzlemindeki noktasal yük dağılımında $q = 3 \mu\text{C}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 1,4 \text{ m}$ ve ortamın bağıl dielektrik katsayısı $\epsilon_r = 8$ ise N noktasının, sonsuz uzağa göre potansiyeli nedir? ($\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

Çözüm: N noktasına q yükünün uzaklığı $a + b$, $2q$ yükünün uzaklığı $\sqrt{a^2 + b^2}$, $-2q$ yükünün uzaklığı $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

$$V_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0(a+b)} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a\sqrt{2}}$$

$$V_N = \frac{3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 8 \times 8,854 \times 10^{-12}} \left(\frac{1}{2+1,4} + \frac{2}{\sqrt{2^2+1,4^2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} \right) \text{ V} \rightarrow \boxed{V_N = 1369,2 \text{ V}}$$



Soru 3.2) Çizgisel yük yoğunluğu λ olan ince bir çemberin, merkezinden çember düzlemine dik b kadar uzakta meydana getirdiği elektriksel potansiyeli, sonsuzu referans olarak bulunuz. Çember merkezindeki potansiyeli de bulunuz.

Çözüm: Sonsuz küçük $d\varphi$ yayı kadarlık kısmın yükü

$$dq = \lambda dl = \lambda a d\varphi$$

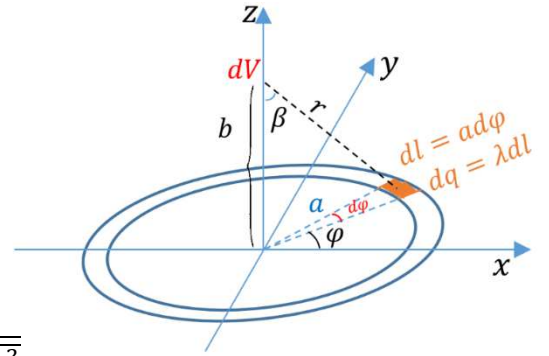
ve bunun istenen noktada oluşturduğu potansiyel

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \frac{\lambda a d\varphi}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Toplamda ise

$$V = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot 2\pi \rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda a}{2\epsilon \sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Eğer $b = 0$ alırsak çember merkezindeki potansiyeli buluruz. $\sqrt{a^2 + 0^2} = a$ olur ve $V = \lambda/(2\epsilon)$ bulunur.



Soru 4.1) xy düzlemi iki farklı dielektrik ortamının sınır yüzeyidir ve yüzeyde net elektriksel yük yoğunluğu yoktur. Yüzeyin $z < 0$ tarafına 1. taraf, $z > 0$ tarafına 2. taraf diyelim ve değerlerini bu indislerle gösterelim. Ortamların bağıl dielektrik sabitleri $\epsilon_{r1} = 3$ ve $\epsilon_{r2} = 5$ olsun. Sınır yüzeyinin hemen 1. tarafındaki elektrik alan vektörü $\vec{E}_1 = (8\hat{x} + 6\hat{y} - 2\hat{z}) \text{ V/m}$ ise, sınırın hemen 2. tarafındaki elektrik alan ne olur?

Çözüm: xy düzlemi (veya sabit z düzlemi) için $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ bileşenleri teğet, $\hat{z}$ bileşeni normal bileşendir. Elektrik alanın teğet bileşeni karşı tarafa aynen geçer. Yani

$$E_{2x} = 8 \text{ V/m} , \quad E_{2y} = 6 \text{ V/m}$$

Yüzeyde net elektriksel yük yoğunluğu yoksa deplasman vektörünün normal bileşeni karşı tarafa aynen geçer. Yani

$$D_{2z} = D_{1z} = (\epsilon_{r1}\epsilon_0)(-2 \text{ V/m}) \rightarrow E_{2z} = \frac{D_{2z}}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{(\epsilon_{r1}\epsilon_0)(-2 \text{ V/m})}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{3}{5}(-2 \text{ V/m}) = -\frac{6}{5} \text{ V/m}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = (8\hat{x} + 6\hat{y} - 1,2\hat{z}) \text{ V/m}}$$

Soru 4.2) Silindirik koordinatlarda $\rho = 4 \text{ m}$ yüzeyi, iki farklı dielektrik ortamının sınır yüzeyidir ve yüzeyde net elektriksel yük yoğunluğu yoktur. Yüzeyin $\rho < 4 \text{ m}$ tarafına iç taraf, $\rho > 4 \text{ m}$ tarafına dış taraf diyelim ve değerlerini bu indislerle gösterelim. Ortamların bağıl dielektrik sabitleri $\epsilon_{r\text{iç}} = 6$ ve $\epsilon_{r\text{dış}} = 2$ olsun. Sınır yüzeyinin bir noktasının hemen dış tarafındaki elektrik alan vektörü $\vec{E}_{\text{dış}} = (12\hat{\rho} - 7\hat{\phi} - 9\hat{z}) \text{ V/m}$ ise, sınırın hemen iç tarafında o nokta komşuluğundaki elektrik alan ne olur?

Çözüm: Sabit ρ düzlemi için $\hat{\phi}$ ve $\hat{z}$ bileşenleri teğet, $\hat{\rho}$ bileşeni normal bileşendir. Elektrik alanın teğet bileşeni karşı tarafa aynen geçer. Yani

$$E_{i\phi} = -7 \text{ V/m} , E_{iz} = -9 \text{ V/m}$$

Yüzeyde net elektriksel yük yoğunluğu olmadığından deplasman vektörünün normal bileşeni karşı tarafa aynen geçer. Yani

$$D_{i\rho} = D_{dış\rho} = (\epsilon_{r\text{dış}}\epsilon_0)(12 \text{ V/m}) \rightarrow E_{i\rho} = \frac{D_{i\rho}}{\epsilon_{r\text{iç}}\epsilon_0} = \frac{(\epsilon_{r\text{dış}}\epsilon_0)(12 \text{ V/m})}{\epsilon_{r\text{iç}}\epsilon_0} = \frac{2}{6}(12 \text{ V/m}) = 4 \text{ V/m}$$

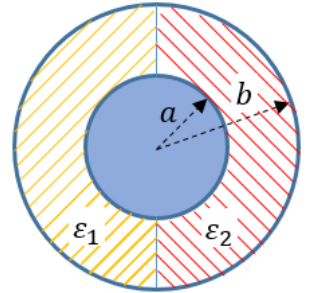
$$\boxed{\vec{E}_{iç} = (4\hat{\rho} - 7\hat{\phi} - 9\hat{z}) \text{ V/m}}$$

(Benzer şekilde küresel koordinatlar için de soru üretip çözünüz. Belirli bir koordinat sabit olan yüzey için çözüm buradaki gibi basittir. Daha karışık ifade edilmesi gereken yüzeyler de olabilir.)

Soru 5.1) İç iletken silindir yarıçapı a , dış iletken silindir yarıçapı b , arası ϵ dielektrik katsayılı ortam olan sonsuz uzun bir silindirik kondansatörün birim uzunluk için kapasitansı,

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

ile verilir. Böyle bir yapının içindeki dielektrik malzeme, kesiti şekilde gösterildiği gibi yarı ϵ_1 , yarı ϵ_2 dielektrik katsayılı ortam olursa birim uzunluk için kapasitans ne olur?



Çözüm: İletkenler her iki bölge sınırlarına da birer taraftan tam temas ettiği için, kondansatör paralel iki parçaya bölünmüş olur. Dielektrik katsayıları aynı (ϵ) olsaydı iki yarının da birim uzunluk için kapasitansları eşit olurdu ve paralel eşdeğerleri, yani toplamı, verilen formüldeki gibi olurdu. Bu yüzden bir yarısının de formülde verilenin yarısı olurdu. Şimdi dielektrik katsayılarını farklı alarak bunların paralel eşdeğerlerini, yani toplamını alırsak, birim uzunluk için kapasitans şöyle bulunur:

$$C_l = \frac{\pi\epsilon_1}{\ln(b/a)} + \frac{\pi\epsilon_2}{\ln(b/a)} = \boxed{\frac{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln(b/a)} = C_l}$$

Soru 5.2) Şekilde kesiti gösterilen paralel levhali kondansatörde d_1 ve d_3 , levhaların kısa kenarından çok çok küçüktür. Şekilde gösterilmeyen derinlik h , aradaki farklı dielektrik ortamların görülen genişlikleri ise ϵ dielektrik katsayıları ile aynı indisli olmak üzere



b_1, b_2, b_3 ve b_4 'tür. Derinlik boyunca ortam değişimi yoktur. İki levha arası kapasitansı, verilenler cinsinden tek bir kesir halinde yazınız. (Temel formül: $C = \epsilon A/d$) (Sınavda yardımcı formül verilirken sembollerin ne olduğu söylenmeyecektir. O kadarını hatırlamalısınız.)

Çözüm: d_1 ve d_3 kalınlığındaki kısımların arasında levha olmasa da aynı mutlak değerde birbirini yok eden artı ve eksi yüklü levhalar varmış gibi hayal edilirse, bu kısımların birbirine seri olduğu görülür. Her birinin kendi içindeki yan yana iki bölgesi de aynı potansiyel farkına sahip oldukları için birbiriyle paralel demektir (1. ve 2. bölgeler birbiriyle paralel; 3. ve 4. bölgeler birbiriyle paralel). ϵ indislerine göre her bir parçanın kapasitansı:

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 b_1 h}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 b_2 h}{d_1}, \quad C_3 = \frac{\epsilon_3 b_3 h}{d_3}, \quad C_4 = \frac{\epsilon_4 b_4 h}{d_3}$$

C_1 ve C_2 'nin paralel eşdeğeri $C_1 + C_2$ 'dir, C_3 ve C_4 'nin paralel eşdeğeri $C_3 + C_4$ 'tür. Bu iki blok da birbiriyle seri olduğundan eşdeğer kapasitansa C dersek:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} \rightarrow C = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = \frac{\frac{(\epsilon_1 b_1 + \epsilon_2 b_2)h}{d_1} \cdot \frac{(\epsilon_3 b_3 + \epsilon_4 b_4)h}{d_3}}{\frac{(\epsilon_1 b_1 + \epsilon_2 b_2)h}{d_1} + \frac{(\epsilon_3 b_3 + \epsilon_4 b_4)h}{d_3}}$$

$$C = \frac{(\epsilon_1 b_1 + \epsilon_2 b_2)(\epsilon_3 b_3 + \epsilon_4 b_4)}{(\epsilon_1 b_1 + \epsilon_2 b_2)d_3 + (\epsilon_3 b_3 + \epsilon_4 b_4)d_1} \cdot h$$

Soru 6.1) $C_1 = 12 \mu\text{F}$ 'lık bir kondansatör üzerinde $V_{11} = 5 \text{ V}$ gerilim vardır. $C_2 = 8 \mu\text{F}$ 'lık bir kondansatör üzerinde de $V_{21} = 10 \text{ V}$ 'luk gerilim vardır. Bu iki kondansatör paralel bağlandığı anda oluşan ark (kıvılcım) sonucu uzaya saçılan enerji miktarını, ve yeni denge durumunda kondansatörlerin gerilimini bulunuz.

Yol gösterme: Yüklerin kondansatörler dışında bir yere saçılmadığını dikkate alınız.

Çözüm: İlk durumda birinci ve ikinci kondansatörler üzerindeki yükler sırasıyla:

$$q_{11} = C_1 V_{11} = 12 \times 10^{-6} \times 5 \text{ C} = 60 \mu\text{C} \quad \text{ve} \quad q_{21} = C_2 V_{21} = 8 \times 10^{-6} \times 10 \text{ C} = 80 \mu\text{C}$$

Paralel durumdaki kapasitans $C_p = C_1 + C_2 = (12 + 8)\mu\text{F} = 20 \mu\text{F}$.

Paralel durumdaki gerilime V_p , yüke q_p dersek:

$$q_p = q_{11} + q_{21} = (60 + 80)\mu\text{C} = 140 \mu\text{C} = C_p V_p \rightarrow V_p = q_p / C_p = 140\mu\text{C} / 20\mu\text{F} = \boxed{V_p = 7 \text{ V}}$$

İlk durumdaki depolanan enerjiler sırasıyla

$$E_{11} = \frac{1}{2} C_1 V_{11}^2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-6} \times 5^2 \text{ J} = 150 \mu\text{J} \quad \text{ve} \quad E_{21} = \frac{1}{2} C_2 V_{21}^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} \times 10^2 \text{ J} = 400 \mu\text{J}$$

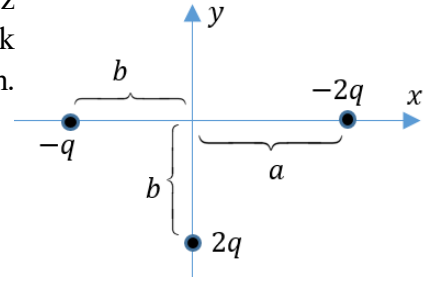
Son durumdaki depolanan enerji E_p ve çevreye saçılan enerji E_s ise:

$$E_p = \frac{1}{2} C_p V_p^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times 7^2 \text{ J} = 490 \mu\text{J}$$

$$E_s = E_{11} + E_{21} - E_p = (150 + 400 - 490)\mu\text{J} = \boxed{E_s = 60 \mu\text{J}}$$

(V_p gerilimi ortaktır. Son durumdaki tek tek yükler sorulmamış ama $q_{12} = C_1 V_p = 84\mu\text{C}$ ve $q_{22} = C_2 V_p = 56\mu\text{C}$)

Soru 6.2) Dielektrik katsayısı $\epsilon = 6 \times 10^{-11}$ F/m olan boş uzayda sonsuz uzaklıktan bir araya getirilen yandaki şekildeki yüklerin oluşturduğu elektrik alanda depolanan toplam enerji ne kadardır? $q = 3 \mu\text{C}$, $a = 70$ cm, $b = 50$ cm.
Çözüm:



$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 Q_i V_i = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3)$$

1, 2, 3 numaralı yükleri, sırasıyla $-q$, $2q$, $-2q$ yükleri seçersek, her birinin bulunduğu noktanın sonsuza göre potansiyeli:

$$V_1 = \frac{2q}{4\pi\epsilon\sqrt{b^2 + b^2}} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon(a+b)} = \frac{2 \times 3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} \sqrt{2} \times 0,5} \text{ V} + \frac{-2 \times 3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} (0,7 + 0,5)} \text{ V} = 4622 \text{ V}$$

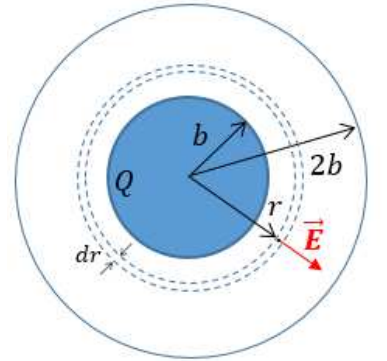
$$V_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon\sqrt{b^2 + b^2}} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} \sqrt{2} \times 0,5} \text{ V} + \frac{-2 \times 3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} \sqrt{0,7^2 + 0,5^2}} \text{ V} = -14878 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{-q}{4\pi\epsilon(a+b)} + \frac{2q}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} (0,7 + 0,5)} \text{ V} + \frac{2 \times 3 \times 10^{-6}}{4\pi \times 6 \times 10^{-11} \sqrt{0,7^2 + 0,5^2}} \text{ V} = 5935 \text{ V}$$

$$W = \frac{1}{2} (-3 \times 10^{-6} \times 4622 + 2 \times 3 \times 10^{-6} \times (-14878) - 2 \times 3 \times 10^{-6} \times 5935) \text{ W} = \boxed{-69,4 \text{ mW}}$$

Dikkat: Sonsuzdan bir araya getirilen yüklerin oluşturduğu sistemde depolanan potansiyel enerji negatif de olabilmektedir.

Soru 6.3) Dielektrik sabiti ϵ olan bir ortamda b yarıçaplı bir küre yüzeyine Q elektrik yükü düzgün dağılmıştır. Ortamda başka bir elektrik alan kaynağı yoktur. Küre merkezinden $b < r \leq 2b$ uzaklığındaki bölgede depolanan elektrik alan enerjisini hesaplayınız.



Çözüm: Birim hacimde depolanan elektrik alan enerjisi

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2$$

$r > b$ yarıçapında sonsuz küçük dr kalınlığında küresel bir kabuk hacmi ($dV' = 4\pi r^2 dr$) içindeki enerjiyi (dW) yazıp integralini alırsak

$$dW = w dV' = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \int_b^{2b} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left[\frac{-1}{r} \right]_{r=b}^{2b} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon b} \left[\frac{-1}{2} - (-1) \right] = \boxed{W = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon b}}$$

Dikkat: Kürenin dışında sonsuza kadarki enerji sorulsaydı, integralin üst sınırı ∞ alınır ve sonuç bunun iki katı bulunurdu. b yarıçaplı küresel kondansatörün kapasitansı $C = 4\pi\epsilon r^2$ ve kondansatörde depolanan enerjinin, $\frac{Q^2}{2C}$ olduğunu da hatırlarsak, $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2}$ enerjisi bulunur. Yani küresel kabuk kondansatörün enerjisi küre dışında sonsuza kadar hacim içindedir.

Soru 7.1) Paralel düzlem levhalı bir kondansatörün levhaları arasındaki mesafe (d), levhaların kısa kenarından çok çok küçüktür. Levhaların birini $y = 0$ düzleminde ve $V = 0$ potansiyelinde, diğerini $y = d$ düzleminde ve $V = V_1$ potansiyelinde kabul ettiğimizde aradaki dielektrik (ϵ) içindeki hacimsel yük yoğunluğu

$$\rho_v = b \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

fonksiyonuyla veriliyor. Aradaki dielektrik içindeki potansiyel ve elektrik alan fonksiyonlarını y 'ye bağlı olarak bulunuz.

Çözüm: Poisson denkleminde göre $\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon$. Burada değişim sadece y boyuncadır. Bu yüzden

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dy^2} = -\frac{b}{\epsilon} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{bd}{\pi\epsilon} \cos\left(\frac{\pi y}{d}\right) + k_1$$

Burada k_1 integral sabitidir. Tekrar belirsiz integral alırsak:

$$V(y) = \frac{bd^2}{\pi^2\epsilon} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) + k_1 y + k_2$$

sınırlarda $y = 0$ ve $y = d$ için $\sin(\pi y/d) = 0$ olur.

$$V(0) = 0 = k_2, \quad V(d) = V_1 = k_1 d \rightarrow k_1 = V_1/d$$

$$V(y) = \frac{bd^2}{\pi^2\epsilon} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) + \frac{V_1}{d} y$$

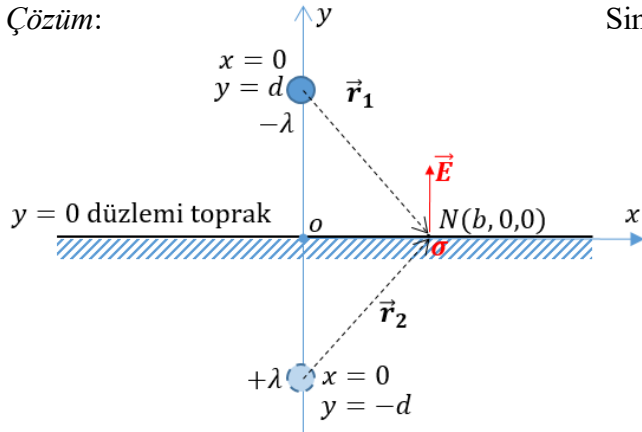
Elektrik alan

$$\vec{E}(y) = -\vec{\nabla}V(y) = -\frac{dV(y)}{dy} \hat{y} = \left[-\frac{bd}{\pi\epsilon} \cos\left(\frac{\pi y}{d}\right) - \frac{V_1}{d} \right] \hat{y} = \vec{E}(y)$$

(Dikkat. Diferansiyel anlamındaki “ d ” ile karışmaması için, burada mesafe anlamındaki “ d ”nin veya karesinin sağına hiçbir harf sembol yazılmamıştır.)

Soru 8.1) Toprak düzlemi ($y = 0$ düzlemi seçelim) karşısında, z eksenine paralel, $x = 0$ hizasında $y = d$ boyunca sonsuz uzun düz ince bir çubuk üzerinde düzgün çizgisel yük yoğunluğu $-\lambda < 0$ olduğuna göre, toprak üzerindeki $N(x, y, z) = N(b, 0, 0)$ noktasındaki elektrik alan vektörünü ve yüzeysel yük yoğunluğunu (σ) bulunuz. $+\lambda$ çizgisel yük yoğunluğuna sahip sonsuz uzun düz çubuğun boş ortamda olsaydı ρ kadar uzakta meydana getirdiği elektrik alanı daha önce bulduğumuz gibi hazır kullanabilirsiniz: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho}$

Çözüm:



Simetriden dolayı görüntü yükünün, asıl yükün tam karşısında zıt işaretli yük yoğunluklu sonsuz uzun düz çubuk olduğu bellidir. Bunların $N(b, 0, 0)$ noktasında oluşturduğu alanlar:

$$\vec{E}^- = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon r_1} \hat{r}_1 = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon r_1^2} \vec{r}_1 = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\hat{x} b - \hat{y} d}{b^2 + d^2}$$

$$\vec{E}^+ = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon r_2} \hat{r}_2 = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon r_2^2} \vec{r}_2 = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\hat{x} b + \hat{y} d}{b^2 + d^2}$$

Bunlar toplanınca $\hat{x}$ bileşenleri birbirini yok eder.

$$\vec{E} = \vec{E}^- + \vec{E}^+ = \hat{y} \frac{\lambda d}{\pi\epsilon(b^2 + d^2)}$$

İletken (toprak) yüzeyindeki gerçek yüzeysel yük yoğunluğu ise

$$\sigma = \epsilon E = \frac{\lambda d}{\pi(b^2 + d^2)}$$

Soru 9.1) Özdirenci $\rho_i = 1,73 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$, uzunluğu $l = 4 \text{ m}$, kesit alanı $A = 1 \text{ mm}^2$ olan bir telden $I = 5 \text{ A}$ akım geçiyor. Tel içindeki elektrik alan şiddetini (skaler) ve tel uçları arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

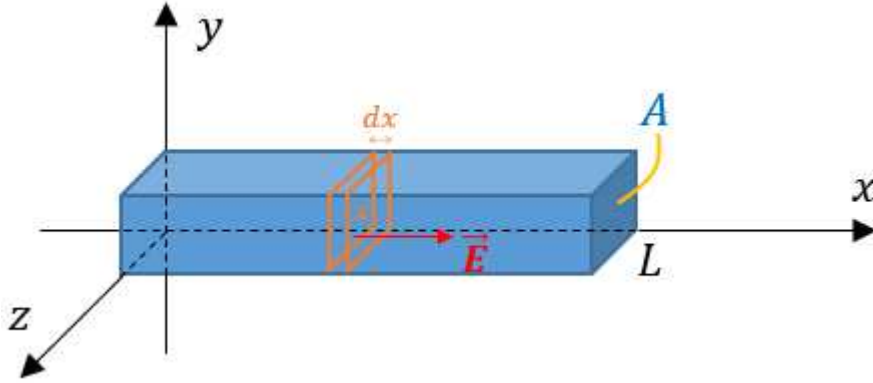
Çözüm: Noktasal Ohm kanunu $\vec{J} = \sigma_i \vec{E}$, öz iletkenlik $\sigma_i = 1/\rho_i$ olduğundan $\vec{E} = \rho_i \vec{J}$ şeklinde de yazılabilir.

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5 \text{ A}}{1 \times (10^{-3} \text{ m})^2} = 5 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$E = \rho_i J = 1,73 \times 10^{-8} \times 5 \times 10^6 \text{ V/m} = \boxed{E = 0,0865 \text{ V/m}}$$

$$R = \frac{\rho_i l}{A} = \frac{1,73 \times 10^{-8} \Omega\text{m} \times 4 \text{ m}}{1 \times (10^{-3} \text{ m})^2} = 0,0692 \Omega \rightarrow V = RI = 0,0692 \Omega \times 5 \text{ A} = \boxed{V = 0,346 \text{ V}}$$

Soru 9.2) Öziletkenliği $\sigma_i = 3,4 \times 10^7 \text{ S/m}$ olan, kenarları x, y, z eksenlerine paralel olan, x eksenine dik kesit alanı sabit $A = 5 \text{ cm}^2$ ve x boyunca uzunluğu $L = 40 \text{ cm}$ olan bir malzeme içindeki elektrik alan, $b = 6 \text{ V/m}^2$ ve $0 \leq x \leq 40 \text{ cm}$ olmak üzere $\vec{E} = bx \hat{x}$ ile veriliyor. Bu malzeme içinde harcanan elektriksel gücü hesaplayınız.



Çözüm: $\vec{J} = \sigma_i \vec{E} = b\sigma_i x \hat{x}$. Hacimsel bölgeye V' , ve x konumunda sonsuz küçük dx kalınlığındaki kısmının hacmine dV' dersek:

$$P = \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{E} dV' = \int_{x=0\text{m}}^{0,4\text{m}} \vec{J} \cdot \vec{E} A dx = \int_{x=0\text{m}}^{0,4\text{m}} b^2 \sigma_i x^2 A dx = b^2 \sigma_i A \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0\text{m}}^{0,4\text{m}}$$

$$P = 6^2 \times 3,4 \times 10^7 \times 5 \times (10^{-2})^2 \times (0,4)^3 / 3 \text{ W} = \boxed{P = 13056 \text{ W}}$$